

МИНИСТЕРСТВО ФИНАНСОВ СССР  
ГЛАВНАЯ ПАЛАТА МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ СССР  
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
МЕТРОЛОГИИ ИМЕНИ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

---

Б. М. ЯНОВСКИЙ, С. В. ГОРБАЦЕВИЧ, Н. А. ВОЛКОВ

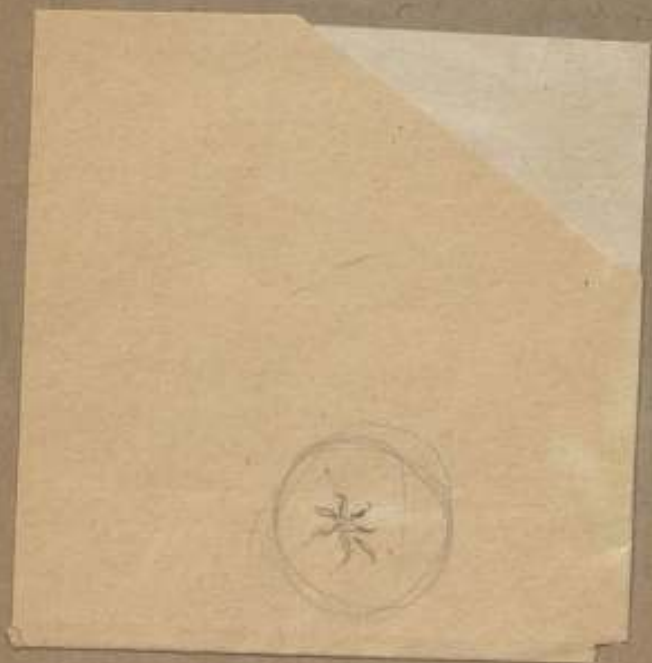
# АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СИЛЫ ТОКА

ТРУДЫ ВНИИМ

*ВЫПУСК 15 (75)*



ГОСЭНЕРГОИЗДАТ



МИНИСТЕРСТВО ФИНАНСОВ СССР  
ГЛАВНАЯ ПАЛАТА МЕР И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ СССР  
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
МЕТРОЛОГИИ имени Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

---

Б. М. ЯНОВСКИЙ, С. В. ГОРБАЦЕВИЧ, Н. А. ВОЛКОВ

АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ  
СИЛЫ ТОКА  
ТРУДЫ ВНИИМ

ВЫПУСК 15 (75)

Под редакцией  
профессора Б. М. ЯНОВСКОГО

146/1м

БИБЛИОТЕКА  
Всесоюзного научно-иссле-  
довательского института метрологии  
имени Д. И. Менделеева



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1953 ЛЕНИНГРАД

*Ответственный редактор — директор ВНИИМ  
канд. техн. наук М. Ф. ЮДИН*

Технический редактор *А. А. Забродина*

---

М-32655. Сдано в произв. 13/III 1953 г. Подп. к печ. 19/VI 1953 г. Зак. № 1142  
Печ. л. 8. Бум. л. 4. Уч.-изд. л. 9 60×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub> Тираж 600.

---

2-я типография имени К. Е. Ворошилова  
Управления Военного Издательства Министерства Обороны Союза ССР

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник „Абсолютные измерения силы тока“ представляет собой изложение теоретических основ метода абсолютных измерений силы тока и экспериментального его осуществления. Абсолютные электрические измерения до настоящего времени у нас почти не производились, так как с девяностых годов прошлого столетия вся практика электрических измерений основывалась на международной системе электрических единиц, не требовавшей производства абсолютных измерений. В 1948 г. СССР перешел на абсолютную систему единиц, и поэтому, естественно, возник вопрос об организации и производстве такого рода работ, которые и были проведены во ВНИИМ в период с 1947 по 1950 г. Ввиду того что в отечественной литературе описанию подобных работ, кроме монографии Л. В. Залуцкого, излагающей основы теории ампер-весов, ничего не посвящалось, настоящий выпуск „Трудов ВНИИМ“ и имеет целью восполнить этот пробел.

В работе Н. А. Волкова, С. В. Горбацевича, Б. М. Яновского, помещенной в настоящем выпуске, излагаются подробно как теория, так и методика эксперимента и его результаты. Работа разбита на две части. В первой из них даны результаты измерений с токовыми весами, имеющими в своем устройстве многослойные катушки, во второй части — результаты работ с такими же весами, но содержащими однослойные катушки.

В обоих случаях описанию результатов измерения предшествует теоретическое рассмотрение, т. е. вывод формул взаимодействия многослойных катушек и однослойных соленоидов. Так как ни в курсах электродинамики, ни в курсах по электрическим измерениям этот вопрос детально не рассматривается, а для абсолютных измерений он имеет основное значение, то рассмотрение его в выпуске является актуальным.

В книге изложены подробно методика и техника эксперимента, а также основные устройства токовых весов двух конструкций. Результаты измерений даны в виде таблиц, которые позволяют судить о точности измерений.

Книга имеет целью познакомить широкие круги научных работников с методикой и аппаратурой абсолютных измерений силы тока, так как в связи с переходом СССР на абсолютную систему единиц возникла необходимость создания такой методики.

Работа по абсолютному определению силы тока проводилась коллективом сотрудников лаборатории образцовых мер ВНИИМ в содружестве с конструкторами и механиками завода „Эталон“.

Общее руководство всеми работами осуществлялось проф. Б. М. Яновским. Исполнителями были: ст. н. с. С. В. Горбачевич и ст. н. с. Н. А. Волков. Конструкция токовых весов разрабатывалась инженером-конструктором А. И. Марциняком. Изготовление токовых весов производилось на экспериментальном заводе „Эталон“ группой механиков под руководством П. П. Базарова.

Введение, § 2, 3 и 4 главы II части первой, § 2—13 главы I части второй написаны Б. М. Яновским. Главы I и III части первой, § 3, 4 и 5 главы II части второй, § 2 и 3 главы III части второй написаны С. В. Горбачевичем. Параграфы 1 и 5 главы II части первой, § 1 главы I части второй, § 1 и 2 главы II части второй, § 1 главы III части второй написаны Н. А. Волковым.

---

## ВВЕДЕНИЕ

### Переход от международной системы электрических единиц к абсолютной

1. Абсолютная система электрических и магнитных единиц была установлена еще в 1881 г. на первом Международном Электротехническом конгрессе. Однако при проведении ее в жизнь встретились настолько большие затруднения, что пришлось ввести для практики новую систему, которая в дальнейшем получила название „международной“ системы электрических и магнитных единиц. Отличие международной системы от абсолютной — не только в разнице числовых значений, но и в чисто принципиальной стороне вопроса. В то время как абсолютная система определяет основные электрические единицы через длину, массу, время, международная система определяет их через произвольные константы: электрохимический эквивалент серебра, принимаемый равным  $0,00111800$  г/сек-а (ампер международный), и удельную проводимость ртути, принимаемую равной  $10630,0$  см/см<sup>2</sup>-ом.

Причиной, заставившей отказаться от абсолютной системы единиц и перейти на международную, явилась недостаточная точность абсолютных электрических измерений по сравнению с точностью относительных измерений. В то время, как погрешность относительных измерений к началу двадцатого века была снижена до  $10^{-6}$  измеряемой величины, погрешность абсолютных измерений, на которых основывается воспроизведение эталонов, доходила до  $10^{-4}$ .

Поэтому для согласования абсолютных измерений с относительными пришлось к значениям констант электрохимического эквивалента серебра и проводимости ртути, полученным из абсолютных измерений, добавить к цифрам после запятой произвольно два нуля, которые, увеличив точность значений этих констант, одновременно придали им условный характер, вследствие чего и система единиц, основанная на них, получила также условный характер. Ввиду того, что первые четыре цифры в значении констант совпадали с абсолютными их значениями, международная система электриче-

ских единиц совпадала с абсолютной системой с точностью до  $10^{-4}$  измеряемой величины, или до  $0,01\%$ .

Если бы измерения электрических величин не были связаны с измерениями величин из других областей физики и техники, то условный характер международной системы и расхождения между ней и абсолютной системой не имели бы никакого значения. Однако в действительности электрические измерения связаны с механическими при определении такой величины, как энергия, которая может быть измерена и при помощи электрических величин и при помощи механических. В первом случае она должна выражаться в международных единицах (международных джоулях), а во втором — в абсолютных единицах (абсолютных джоулях) и, пока точность измерений не превышает  $0,01\%$ , международные джоули будут совпадать с абсолютными. При повышении же точности измерений они должны разойтись, и в этом случае международная система становится уже неудобной для практического пользования.

Это неудобство стало ощущаться после того, как благодаря успехам измерительной техники точность измерений во всех областях физики и техники значительно повысилась по сравнению с тем временем, когда устанавливалась международная система. Поэтому в конце двадцатых годов нынешнего столетия Главной палатой мер и весов (ныне ВНИИМ) был поднят вопрос о замене международной системы абсолютной. Однако начавшаяся в 1941 г. Великая Отечественная война отсрочила этот переход, который состоялся лишь в 1948 г.

Для осуществления перехода от международной системы к абсолютной системе электрических и магнитных единиц потребовалось в первую очередь установление новых эталонов для основных электрических единиц. Работы, связанные с этим установлением, начались во Всесоюзном Научно-исследовательском институте метрологии имени Д. И. Менделеева (ВНИИМ) еще в 1938 г. и заключались в разработке методики абсолютных электрических измерений силы тока, постройке специальных приборов и аппаратуры и в производстве самих измерений.

2. Абсолютными измерениями мы называем такие, при которых непосредственно измеряемыми величинами являются длина, масса и время, а определяемая величина вычисляется по формулам, связывающим ее с основными величинами — длиной, массой и временем. Эти формулы устанавливаются на основании тех закономерностей, которые существуют в данной области явлений.

Таким образом, методика абсолютных электрических измерений должна основываться на известных нам законах электродинамики, которые позволяют осуществить два метода



абсолютных электрических измерений, не зависящих один от другого. Первый из них основан на законе взаимодействия между током и магнитной стрелкой (закон Эрстеда), а второй — на законе взаимодействия между двумя токами (закон Ампера). В первом методе момент вращения, действующий на магнитную стрелку со стороны тока, протекающего в замкнутом контуре, уравнивается моментом, действующим со стороны земного магнитного поля, и условие равновесия определяется уравнением:

$$H_i \sin \theta_i = H \sin \theta,$$

где  $H_i$  — напряженность магнитного поля, создаваемого контуром тока в горизонтальном направлении;

$H$  — горизонтальная составляющая земного поля;

$\theta_i$  и  $\theta$  — углы, составляемые осью стрелки с направлениями  $H_i$  и  $H$ .

Так как  $H_i$  всегда пропорциональна силе тока, то, зная коэффициент пропорциональности и измеряя углы  $\theta_i$  и  $\theta$ , можно определить и силу тока, если только известна величина горизонтальной составляющей земного поля  $H$ .

Приборы, построенные на этом принципе, получили название тангенс- или синус-гальванометров. Для тангенс-гальванометра  $\theta_i = 90^\circ - \theta$ , а для синус-гальванометра  $\theta_i = 90^\circ$ , величина же  $H_i$  в обоих приборах одинакова и равна  $kI$ . Таким образом, для тангенс-гальванометра

$$kI = H \operatorname{tg} \theta,$$

а для синус-гальванометра

$$kI = H \sin \theta,$$

где  $I$  — сила тока в контуре и

$k$  — постоянная, зависящая от размеров контура и положения его относительно магнитной стрелки.

Следовательно,

$$I = \frac{H}{k} \sin \theta \quad \text{или} \quad I = \frac{H}{k} \operatorname{tg} \theta.$$

Постоянная  $k$ , представляющая напряженность магнитного поля, создаваемого контуром при силе тока  $I$ , равной единице, находится по соответствующим формулам, связывающим постоянную  $k$  с линейными размерами контура и координатами центра стрелки относительно центра контура. Так, для любого кругового контура напряженность поля в любой точке пространства при  $I=1$  выражается формулой:

$$H_i = \operatorname{grad} \Omega,$$

где  $\Omega$  — телесный угол, под которым виден контур из данной точки, и в свою очередь может быть вычислен по формуле:

$$\Omega = \iint \frac{(ds, r)}{r^3},$$

причем  $ds$  — элемент поверхности, опирающейся на контур тока;

$r$  — расстояние от данной точки до элемента поверхности  $ds$ ,

и интегрирование распространяется на всю поверхность контура.

Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли  $H$  должна быть определена экспериментально абсолютным методом из наблюдений периода качания  $T$  магнита, свободно качающегося в горизонтальной плоскости, и угла отклонений  $\theta$  второго магнита, также свободно качающегося в горизонтальной плоскости под действием первого. При этом оба магнита должны быть расположены в одной и той же горизонтальной плоскости, и продолжение оси первого магнита должно проходить через центр второго (рис. 1).

Если обозначить магнитный момент первого магнита через  $M$ , а момент инерции его через  $K$ , то период качания  $T$  определяется по одной из формул механики:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MH}}. \quad (A)$$

Угол  $\theta$  отклонения магнита  $M_1$  (рис. 1) от магнитного меридиана  $NS$  связан с горизонтальной составляющей  $H$  формулой:

$$H = \frac{2M}{R^3 \sin \theta} \left[ 1 + \frac{p}{R^3} \right], \quad (B)$$

где  $R$  — расстояние между центрами магнитов;

$p$  — некоторая постоянная, зависящая от размеров обоих магнитов.

Исключая  $M$  из уравнений (A) и (B), получим:

$$H = 2\pi \sqrt{\frac{2K \left[ 1 + \frac{p}{R^3} \right]}{R^3}} \frac{1}{T \sqrt{\sin \theta}}.$$

Следовательно, зная  $K$  и измеряя  $R$ , можно определить и  $H$ .

Во втором случае сила, действующая на замкнутый проводник со стороны другого замкнутого проводника, обычно имеющих ту или другую форму катушек, может быть уравновешена на весах силой тяжести гири. В этом случае уравнение равновесия имеет вид:

$$mg = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial z},$$

где  $M$  — взаимная индуктивность;  
 $I_1$  и  $I_2$  — силы токов в первом и во втором проводниках;  
 $m$  — масса уравновешивающей гирьки;  
 $g$  — ускорение силы тяжести, а  
 $\frac{\partial M}{\partial z}$  — производная по вертикальному направлению.

Прибор, построенный на этом принципе, получил название ампер-весов или токовых весов. В этом приборе катушки располагаются коаксиально и соединяются последовательно. Сила тока  $I$  определится по формуле:

$$I = \sqrt{\frac{mg}{\frac{\partial M}{\partial z}}}. \quad (B)$$

Взаимная индуктивность может быть вычислена из геометрических размеров катушек по формуле:

$$M = \oint \oint \frac{(dl_1, dl_2)}{r}, \quad (Г)$$

где  $dl_1$  и  $dl_2$  — элементы длины проводников катушки и  
 $r$  — расстояние между ними.

Интегрирование распространяется на контуры обеих катушек.

Для того чтобы выразить единицу силы тока в словесной форме, необходимо в уравнении (B) производную взаимной индуктивности представить в виде простого соотношения, каким является алгебраический одночлен. Такой вид принимает производная  $\frac{\partial M}{\partial z}$ , когда проводники, имеющие прямолинейную форму, бесконечной длины и бесконечно малого сечения, параллельны между собой. В этом случае

$$I = \sqrt{\frac{FR}{2}},$$

где  $F$  — сила, действующая на единицу длины проводника, и  
 $R$  — расстояние между проводниками.

Следовательно,  $I=1$ , когда  $R=2$  см и  $F=1$  дин/см.

Такая единица получила название абсолютной электромагнитной единицы силы тока и ее определение можно формулировать следующими словами: „абсолютная электромагнитная

единица силы тока есть сила неизменяющегося электрического тока, который, протекая по каждому из двух бесконечно длинных параллельных прямолинейных проводников бесконечно малого сечения, расположенных на расстоянии 2 см в вакууме, создает между этими проводниками силу взаимодействия в 1 дину на каждый сантиметр длины". Практическая же единица силы тока — ампер, как известно, является одной десятой абсолютной электромагнитной единицы силы тока.

Хотя это соотношение и является чрезвычайно простым теоретически, однако использовать его на практике для установления методики абсолютных измерений не представляется возможным, так как нельзя осуществить бесконечно длинные и бесконечно тонкие проводники, для которых это соотношение и является единственно справедливым.

Наиболее удобной формой проводников для практических целей являются формы однослойных и многослойных соленоидов, вследствие чего они применяются для постройки токовых весов. Однако в этом случае теоретическое соотношение между силой токов и основными величинами длины, массы и времени становится чрезвычайно сложным.

Сравнивая оба метода, мы видим, что для определения силы тока синус- или тангенс-гальванометром, помимо непосредственных измерений угла отклонения  $\theta$  и размеров контура, необходимо еще измерить величину горизонтальной составляющей земного поля  $H$ , а для определения силы тока при помощи токовых весов, помимо непосредственного взвешивания, требуется определение ускорения силы тяжести  $g$ . Так как для данной точки земной поверхности величина  $g$  остается постоянной, а величина  $H$  непрерывно меняется вследствие суточных вариаций магнитного поля Земли, то погрешность, с какой можно определить величину  $g$ , значительно меньше погрешности определения  $H$ . Поэтому имеются серьезные основания предполагать, что точность определения силы тока методом таковых весов значительно выше метода синус- или тангенс-гальванометра, вследствие чего ВНИИМ в своих работах по абсолютному определению ампера, при выборе методики измерения, остановился на методе взаимодействия катушки.

3. Вскоре после того, как Гауссом была предложена абсолютная система единиц, русские ученые Ленц и Якоби в 1839 г. измерили силу отталкивания между катушкой и магнитом, помещая катушки на конец коромысла весов с целью определения силы тока.

Годом позднее измерения силы тока были произведены Вебером при помощи тангенс-гальванометра с целью определения электрохимического эквивалента воды.

Впервые токовые весы были сконструированы в 1863 г. Они состояли из двух прямоугольных катушек, расположен-

ных в горизонтальной плоскости, одна из которых была подвешена к коромыслу весов, а другая несколько ниже помещалась на специальном столике. Прибор применялся для определения электрохимического эквивалента воды.

Дальнейшие работы по абсолютным измерениям силы тока проводились неоднократно разными исследователями на протяжении всей второй половины XIX и начала XX вв.

К началу XX в. удалось достигнуть точности измерения обивми методами порядка  $10^{-4}$  измеряемой величины.

В 1908 г. в одной из физических лабораторий была произведена работа с таковыми весами, в результате которой погрешность измерения силы тока оказалась порядка  $3 \cdot 10^{-5}$ . Катушками в этих весах служили два соленоида, намотанные на мраморные цилиндры и помещенные один внутри другого.

Эта работа и послужила основанием утверждать, что ампер-весы дают возможность измерять силу тока значительно точнее, чем синус- или тангенс-гальванометры.

Первая попытка применения законов электродинамики к измерению электрических величин, как было указано выше, была сделана русскими физиками Якоби и Ленцом. Однако в последующие годы никто из русских ученых этим вопросом не занимался вплоть до тридцатых годов настоящего столетия, когда ВНИИМ снова обратился к нему и занялся его решением.

Работа во ВНИИМ была начата в 1938 г. под руководством покойного проф. Л. В. Залуцкого в лаборатории образцовых электрических мер, и к началу войны была закончена постройкой на заводе „Эталон“ первой опытной модели токовых весов с многослойными катушками.

После проведения целого ряда экспериментов и теоретического изучения в послевоенные годы в лаборатории образцовых электрических мер ВНИИМ пришли к заключению о необходимости постройки новой модели токовых весов с однослойными цилиндрическими катушками, которые и были изготовлены в 1947 г. В том же году были начаты экспериментальные исследования, закончившиеся в 1951 г., однако первые результаты были получены еще в 1948 г.

Результатом этих работ явилось установление единицы силы тока с погрешностью, не превышающей  $10^{-5}$  ее величины, и возможность измерять электродвижущую силу нормального элемента в абсолютных единицах и тем самым передавать значения абсолютного ампера и абсолютного вольта во все отрасли электроизмерительной техники с погрешностью того же порядка.

Передача значения силы тока от эталона к рабочим эталонам и образцовым мерам осуществляется путем их сличений, точность которых на порядок выше точности установления

эталона, так как погрешностью непосредственных измерений, влияющих на результаты сличения, остается лишь погрешность взвешивания. Все остальные погрешности — погрешность определения диаметров и длины катушек, ускорения силы тяжести — войдут как систематические погрешности, постоянные при всех сличениях. Сумма этих погрешностей составит разницу между истинным значением абсолютной величины и значением в показаниях измерительных приборов, градуированных в абсолютных единицах. Так как эта разница, не превышающая  $1 \cdot 10^{-5}$  измеряемой величины, остается постоянной, то она не может отразиться на единстве электрических измерений в нашей стране.

Токовые весы как эталонная установка, воспроизводящая единицу силы тока, совершенно независимы от каких-либо международных эталонов, так как они опираются на прототипы килограмма и метра, хранящиеся во ВНИИМ, и поэтому могут быть в любое время восстановлены заново в случае их порчи или износа.

Это обстоятельство вытекает из того, что создание эталона единицы силы тока основывается на электродинамическом законе, а не на спесификации, что является одной из наиболее важных причин перехода на абсолютную систему электрических единиц.

Глава I

УСТРОЙСТВО ТОКОВЫХ ВЕСОВ С МНОГОСЛОЙНЫМИ КАТУШКАМИ  
И ИХ ТЕОРИЯ

§ 1. Устройство токовых весов с многослойными катушками

Работы на весах этого типа предшествовали работам на весах с однослойными соленоидами и именно на них впервые во Всесоюзном научно-исследовательском институте метрологии было определено значение единицы абсолютного ампера по отношению к международному амперу.

Проведение абсолютных измерений на токовых весах различных типов явилось важным с точки зрения получения наиболее достоверных результатов, так как по существу применялись два метода, что представляет наилучший критерий для исключения систематических погрешностей.

Так как наибольшая трудность в весах с многослойными катушками заключается в расчете поправочных членов на конечность сечения в выражении постоянной электродинамической системы, то главное внимание было уделено критическому анализу и пересмотру существовавшей теории расчета поправочных членов, применявшейся в иностранной метрологической практике.

Все расчеты и были проведены в соответствии с полученными теоретическими результатами.

Общий вид токовых весов показан на рис. 2. Они состоят из следующих основных узлов: 1) рычажных весов с дистанционным управлением; 2) оптической системы; 3) подвижных и неподвижных катушек, составляющих взаимодействующую электродинамическую систему; 4) водоохладительной системы; 5) подводок тока к подвижной катушке; 6) юстировочных приспособлений.

1. Рычажные весы имеют общую конструкцию с равноплечным коромыслом длиной 40 см, допускающим нагрузку

до 2 кг. Центральные и концевые опорные подушки и призмы изготовлены из агата. Колонка весов смонтирована на мраморной доске, имеющей три установочных винта. Весы со всех сторон закрыты деревянным остекленным футляром с двумя дверцами с передней стороны. Обычное эксцентриковое устройство для арретирования имеет дополнительную

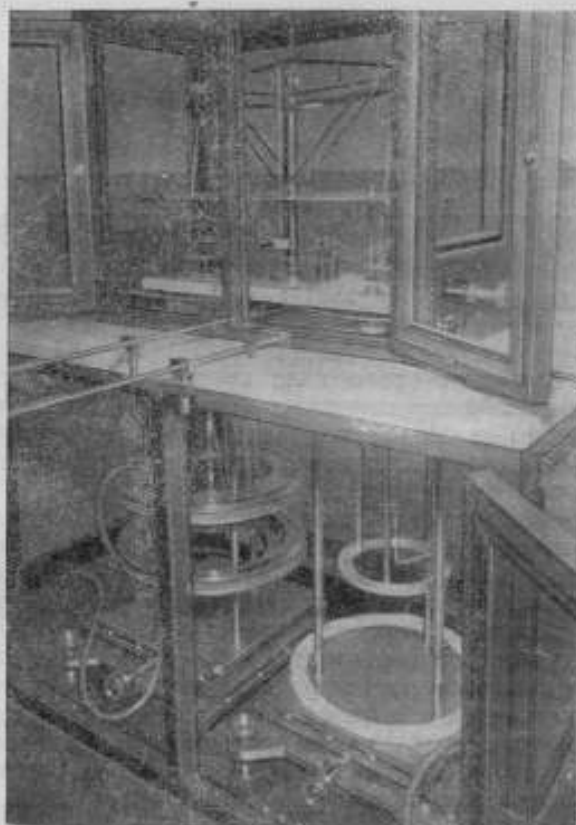


Рис. 2. Общий вид токовых весов с многослойными катушками

удлиненную штангу, при помощи которой спуск с арретира и остановка весов производится из смежного помещения. Наложение на чашки весов грузиков и снятие их осуществляется без открытия футляра весов специальными посадчиками.

2. Для наблюдения за колебаниями коромысла весов установлена оптическая отсчетная система. В нее входят: осветитель с диафрагмой, призма с полным внутрен-



ним отражением, фокусирующая линза, зеркальце, прикрепленное к коромыслу весов, и шкала с миллиметровыми делениями.

Осветитель и шкала размещены в комнате для наблюдений. Для прохождения прямого и обратного лучей света в стенке, отделяющей весовую комнату от комнаты для наблюдений, проделано небольшое окно. Расстояние от зеркальца до отсчетной шкалы равно 2,8 м.

3. Электродинамическая система состоит из одной подвижной и двух неподвижных катушек. Каркас подвижной катушки сделан из алюминия, а каркасы неподвижных — из латуни. Намотка катушек сделана из оксидированной алюминиевой ленты.

Подвижная катушка при помощи специальных держателей подвешивается к чашкам весов. Неподвижные катушки попарно соединяются в блоке, позволяющем располагать катушки в параллельных плоскостях и менять расстояние между ними при помощи трех микрометрических стоек.

Внутри латунных каркасов имеется кольцевая полость, через которую протекает охлаждающая вода.

4. Водоохладительная система предназначена для отвода тепла, выделяющегося в обмотках неподвижных катушек при прохождении через них тока. Система состоит из медных и резиновых трубок, при помощи которых подается холодная вода в полости неподвижных катушек и отводится от них. Для регулирования потока воды подводящие и отводящие трубки снабжены кранами.

5. Токовые подводки служат для присоединения подвижных катушек к электрической схеме токовых весов. Они изготовлены из серебряной ленточки толщиной 0,03 мм и шириной 1,5 мм. Такая ленточка длиной около 350 мм соединяет каждый из двух выводов обмотки подвижной катушки с соответствующими зажимами, укрепленными на корпусе токовых весов. Качество подвесок характеризуется незначительной жесткостью, мало влияющей на чувствительность весов.

6. Юстировочные приспособления служат для перемещения блоков неподвижных катушек в горизонтальной плоскости, в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Такое перемещение дает возможность достигнуть коаксиального расположения подвижной и неподвижных катушек. Приспособления состоят из бронзовых оснований, устанавливаемых горизонтально при помощи трех опорных винтов. На горизонтальных основаниях расположены передвигаемые платформы, на которых укрепляются блоки неподвижных катушек. Передвижные платформы, а вместе с ними и блоки катушек, перемещаются при помощи микрометрических винтов, по которым отсчитывается величина перемещений.

Юстировочные приспособления с блоками неподвижных катушек установлены на специальном основании и закрыты деревянным остекленным футляром. С трех сторон футляр имеет дверцы, а сверху закрыт массивной мраморной плитой, на которой расположены весы, описанные в п. 1.

## § 2. Взаимодействие линейных контуров

Из формулы (В) следует, что для измерения силы тока  $I$  требуется непосредственно измерить механическую силу  $mg$  и определить взаимную индуктивность  $M$  как функцию размеров контуров и расстояния между ними, т. е. решить задачу по нахождению двойного интеграла (Г).

Такая задача решена для ряда случаев и, в частности, для круговых коаксиальных контуров, расположенных в параллельных плоскостях, подробное решение которых приведено в монографии проф. Л. В. Залуцкого „Введение в теорию ампер-весов“.

Для случая взаимодействия двух круговых коаксиальных параллельных токовых контуров выражение  $\frac{\partial M}{\partial x}$  может быть представлено, в частности, следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\pi^2 r_1^2 r_2^2}{\rho^4} & \left[ 1 \cdot 2 \cdot 3 \frac{x_1}{\rho} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{x_2}{\rho^2} \left( x_2^2 - \frac{1}{4} r_2^2 \right) + \right. \\ & + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{\rho^3} \left( x_1^3 - \frac{3}{4} r_1^2 x_1 \right) \left( x_2^2 - \frac{1}{4} r_2^2 \right) + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{\rho^2} \left( x_1^4 - \frac{3}{2} x_1^2 r_1^2 + \frac{1}{8} r_1^4 \right) \times \\ & \times \left( x_2^3 - \frac{3}{4} x_2 r_2^2 \right) + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{\rho^3} \left( x_1^5 - \frac{5}{2} x_1^3 r_1^2 + \frac{5}{8} x_1 r_1^4 \right) \times \\ & \left. \times \left( x_2^4 - \frac{3}{2} x_2^2 r_2^2 + \frac{1}{8} r_2^4 \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\pi x}{V r_1 r_2} \frac{k}{1-k^2} [2(1-k^2)K - (2-k^2)E], \quad (2)$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода;

$$x = x_1 - x_2; \quad \rho^2 = r_1^2 + x^2;$$

$k = \sqrt{\frac{4r_1 r_2}{x^2 + (r_1 + r_2)^2}}$  — модуль эллиптических интегралов.

Значения  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , входящие в формулы (1) и (2), видны на рис. 3.

Приведенные формулы не всегда могут применяться с одинаковым успехом. Ряд (1) медленно сходится, а формула (2)

при больших значениях модуля  $k$  не позволяет производить точную интерполяцию. Известен ряд способов для преобразования эллиптических интегралов к интегралам с другими модулями. Все такие преобразования, в том числе и метод Ландена, по существу представляют собой не что иное, как преобразование рядов для получения большей сходимости.

Величина  $\frac{\partial M}{\partial x}$ , как это следует из формул (1) и (2), имеет нулевую размерность и является функцией двух отношений, а именно:  $\frac{r_2}{r_1}$  и  $\frac{x}{r_1}$ . Это обстоятельство очень важно, так как для вычисления  $\frac{\partial M}{\partial x}$  нет необходимости производить линейные измерения радиусов контуров и расстояния между их центрами, а достаточно определить лишь упомянутые отношения. Как будет видно из дальнейшего, при вычислении  $\frac{\partial M}{\partial x}$  для многослойных кату-

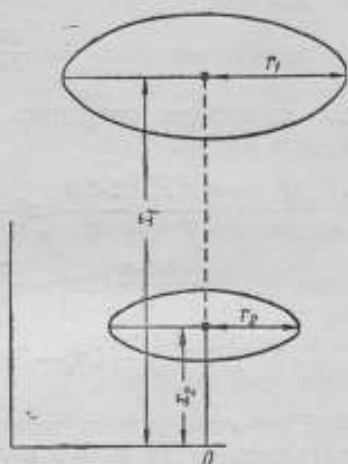


Рис. 3. Расположение взаимодействующих витков с общей осью и параллельными плоскостями

шек, определение отношений  $\frac{r_2}{r_1} = a$  и  $\frac{x}{r_1} = z$  представляет один из наиболее существенных этапов в абсолютных измерениях силы тока.

Рассматривая случай двух взаимодействующих круговых витков, обтекаемых током, следует отметить существенное различие между этими двумя отношениями: в то время, как  $a$  для данных контуров есть величина неизменная, величину  $z$  можно произвольно изменять в зависимости от взаимного расположения контуров. Если, однако, взаимное положение контуров ограничить некоторым условием, при котором оно будет вполне определенным, то величина  $z$ , соответствующая этому положению, будет также постоянной. Пусть таким условием будет требование, чтобы сила взаимодействия между контурами была максимальной.

В таком случае

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dF}{dx} = 0. \quad (3)$$

Как следует из рис. 3, расстояние между плоскостями двух контуров  $x = x_1 - x_2$ . При перемещении одного из контуров (назовем его подвижным) изменяется  $x_2$ , и для того чтобы

найти  $x$ , а следовательно и  $z = \frac{x}{r_1}$ , соответствующее максимальной силе взаимодействия, необходимо решить уравнение (3) относительно  $x$ .

Так как

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{dF}{dx_2}, *$$

то, произведя операцию дифференцирования уравнения (1), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx_2} = \frac{\pi^2 r_1^2 r_2^2}{\rho^4} & \left[ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{\rho^3} \left( x_2^2 - \frac{1}{4} r_2^2 \right) + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 x_2}{\rho^5} \left( x_1^2 - \frac{3}{4} r_1^2 x_1 \right) + \right. \\ & + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{\rho^7} \left( 3x_2^2 - \frac{3}{4} r_2^2 \right) \left( x_1^2 - \frac{3}{2} x_1^2 r_1^2 + \frac{1}{8} r_1^4 \right) + \\ & \left. + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{\rho^9} \left( 4x_2^3 - 3x_2 r_2^2 \right) \left( x_1^3 - \frac{5}{2} x_1^2 r_1^2 + \frac{5}{8} x_1 r_1^4 \right) \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

При совмещении начала координат с центром подвижной катушки, когда  $x_2 = 0$  и  $x_1 = x$ , предыдущее выражение получает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} = \frac{\pi^2 r_1^2 r_2^2}{\rho^4} & \left[ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{\rho^3} \left( x^2 - \frac{1}{4} r_1^2 \right) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 6 r_2^2}{\rho^7} \left( x^4 - \frac{3}{2} x^2 r_1^2 + \frac{1}{8} r_1^4 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 r_2^4}{\rho^{11}} \left( x^6 - \frac{15}{4} x^4 r_1^2 + \frac{15}{8} x^2 r_1^4 + \frac{5}{6} r_1^6 \right) \right] + \dots = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Из этого уравнения видно, что  $\frac{dF}{dx}$  является функцией  $z = \frac{x}{r_1}$  и  $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$ . Действительно, сокращая равенство (5) на  $\frac{\pi^2 r_1^2 r_2^2}{\rho^7}$  и учитывая, что  $\rho^2 = r_1^2 + x^2$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \alpha^2}{(1+z^2)^2} & \left( z^4 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{1}{8} \right) + \\ + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \alpha^4}{(1+z^2)^4} & \left( z^6 - \frac{15}{4} z^4 + \frac{15}{8} z^2 + \frac{5}{64} \right) + \dots = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Это уравнение решается относительно  $z$  методом последовательных приближений. Для этого, полагая первый член равным нулю, получим первое приближенное значение:

$$z_1 = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

\* Расстояние центра неподвижного контура до начала координат постоянно, и следовательно,  $dx = -dx_2$ .

Подставляя это значение  $z_1$  во второй член выражения (6), получим второе приближенное значение:

$$z_2 = \frac{1}{2} - 0,45\alpha^2. \quad (8)$$

Произведя дальнейшее приближение, получим третье приближенное значение:

$$z_3 = \frac{1}{2} - 0,45\alpha^2 - 0,0625\alpha^4. \quad (9)$$

В практических случаях, когда  $\alpha$  заключается в пределах от 0,5 до 0,6, достаточно ограничиться третьим приближением для  $z$ .

Эти выводы позволяют сделать заключение, что для вычисления максимальной силы взаимодействия между двумя круговыми линейными контурами, обтекаемыми током, силой, равной единице и численно равной  $\frac{\partial M}{\partial x}$ , необходимо иметь одну лишь постоянную, а именно, отношение радиусов взаимодействующих витков.

Выше было сказано, что для линейных контуров определение отношения радиусов представляет задачу линейных измерений. Совершенно иным образом должен решаться этот вопрос для реальных токовых весов с многослойными катушками конечного сечения. В этом случае речь может идти о некоторых средних радиусах, называемых эквивалентными.

Контурные таких эквивалентных радиусов могут и не совпадать ни с одним из реальных витков, составляющих катушки токовых весов. Определение отношения таких эквивалентных радиусов рассматривается в одном из следующих параграфов.

### § 3. Взаимодействие многослойных катушек конечного сечения

Физический смысл производной  $\frac{\partial M}{\partial x}$  ясен из формулы (В), а именно:  $\frac{\partial M}{\partial x}$  есть сила взаимодействия между двумя витками, по которым протекает ток, равный единице. В дальнейшем для простоты  $\frac{\partial M}{\partial x}$  будет обозначаться через  $F$ .

Если число витков в контурах обозначить  $w_1$  и  $w_2$  и силу тока  $I$ , то сила взаимодействия между двумя такими контурами

$$f = w_1 w_2 I^2 F. \quad (10)$$

Формула (10) справедлива для идеализированного случая, предполагающего, что витки  $w_1$  и  $w_2$  укладываются в беско-

нечно тонких слоях. В реальных токовых весах токи протекают по многослойным катушкам, имеющим конечную площадь поперечного сечения. Задача заключается в том, чтобы найти поправку к силе электродинамического взаимодействия между контурами, зависящую от конечных размеров поперечного сечения.

Положим, что  $x$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  отнесены к геометрическим центральным виткам катушек.

Так как  $F$  есть функция от  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $r_1$  и  $r_2$ , т. е.  $F = F(x_1, x_2, r_1, r_2)$ , то для любых двух витков, имеющих радиусы  $r_1 + c_{1l}$  и  $r_2 + c_{2l}$ , центры которых отстоят от начала координат на расстояниях  $x_1 + b_{1l}$  и  $x_2 + b_{2l}$ , сила взаимодействия  $F$  имеет значение:

$$F_l = F(x_1 + b_{1l}, x_2 + b_{2l}, r_1 + c_{1l}, r_2 + c_{2l}), \quad (11)$$

причем  $x_1 - x_2 = x$ .

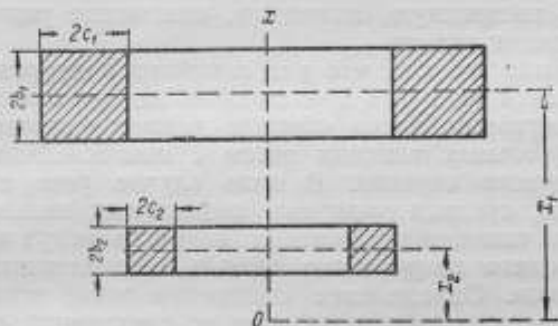


Рис. 4. Расположение взаимодействующих катушек конечного сечения с общей осью и параллельными плоскостями

Решение задачи основано на том, что среднее значение  $F_l$  для всех контуров, имеющих  $b_{1l}$  от  $-b_1$  до  $+b_1$ ;  $b_{2l}$  от  $-b_2$  до  $+b_2$ ;  $c_{1l}$  от  $-c_1$  до  $+c_1$  и  $c_{2l}$  от  $-c_2$  до  $+c_2$ , умноженное на произведение ампер-витков катушек, равно силе взаимодействия между катушками. При этом  $2b_1 \times 2c_1$  и  $2b_2 \times 2c_2$  — площади поперечного сечения катушек (рис. 4).

Среднее значение силы взаимодействия  $F_{cp}$  в области этих сечений находится путем обычного интегрирования функции  $F_l$  в заданных пределах, а именно:

$$F_{cp} = \frac{1}{16b_1b_2c_1c_2} \int_{-b_1}^{+b_1} db_1 \int_{-b_2}^{+b_2} db_2 \int_{-c_1}^{+c_1} dc_1 \int_{-c_2}^{+c_2} F_l dc_2, \quad (12)$$

Подинтегральная функция  $F_i$  может быть разложена в ряд по теореме Тейлора по степеням  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  и  $c_2$ . Такое разложение дает:

$$\begin{aligned}
 F_i = & F + (b_1 + b_2) \frac{dF}{dx} + c_1 \frac{dF}{dr_1} + c_2 \frac{dF}{dr_2} + \frac{(b_1^2 + b_2^2)}{2} \frac{d^2F}{dx^2} + \\
 & + \frac{c_1^2}{2} \frac{d^2F}{dr_1^2} + \frac{c_2^2}{2} \frac{d^2F}{dr_2^2} + b_1 b_2 \frac{d^2F}{dx^2} + b_1 c_1 \frac{d^2F}{dx dr_1} + b_1 c_2 \frac{d^2F}{dx dr_2} + \\
 & + c_1 c_2 \frac{d^2F}{dr_1 dr_2} + b_2 c_1 \frac{d^2F}{dx dr_1} + b_2 c_2 \frac{d^2F}{dx dr_2} + \dots + \frac{1}{4!} b_1^4 \frac{d^4F}{dx^4} + \\
 & + \frac{1}{4!} b_2^4 \frac{d^4F}{dx^4} + \frac{1}{4!} c_1^4 \frac{d^4F}{dr_1^4} + \frac{1}{4!} c_2^4 \frac{d^4F}{dr_2^4} + \frac{6}{4!} \left[ b_1^2 b_2^2 \frac{d^4F}{dx^4} + \right. \\
 & + b_1^2 c_1^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_1^2} + b_1^2 c_2^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_2^2} + b_2^2 c_1^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_1^2} + b_2^2 c_2^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_2^2} + \\
 & \left. + c_1^2 c_2^2 \frac{d^4F}{dr_1^2 dr_2^2} \right] + \dots
 \end{aligned} \quad (13)$$

Члены с четвертыми производными, содержащие множители  $b_{1,2}$  и  $c_{1,2}$  в нечетных степенях, опущены, так как при интегрировании в указанных в формуле (12) пределах они обращаются в нуль. Это же относится ко всем членам с первыми и третьими производными, которые содержат  $b_{1,2}$  и  $c_{1,2}$  в нечетных степенях.

Подставляя в формулу (12) вместо  $F_i$  его выражение из формулы (13), путем почленного интегрирования получим выражение для  $F_{cp}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{cp} = & F + \left[ \frac{b_1^2 + b_2^2}{6} \right] \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{c_1^2}{6} \frac{d^2F}{dr_1^2} + \frac{c_2^2}{6} \frac{d^2F}{dr_2^2} + \left[ \frac{b_1^2 + b_2^2}{120} \right] \frac{d^4F}{dx^4} + \\
 & + \frac{1}{120} \left[ c_1^4 \frac{d^4F}{dr_1^4} + c_2^4 \frac{d^4F}{dr_2^4} \right] + \frac{1}{36} \left[ b_1^2 b_2^2 \frac{d^4F}{dx^4} + b_1^2 c_1^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_1^2} + \right. \\
 & \left. + b_1^2 c_2^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_2^2} + b_2^2 c_1^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_1^2} + b_2^2 c_2^2 \frac{d^4F}{dx^2 dr_2^2} + c_1^2 c_2^2 \frac{d^4F}{dr_1^2 dr_2^2} \right]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Напишем формулу (14) в следующем виде:

$$F_{cp} = F \left( 1 + \frac{\Delta F}{F} \right) = F (1 + \Delta), \quad (15)$$

где значение  $\Delta F$  видно из формулы (14).

Совершенно очевидно, что  $\Delta F$  есть поправка на конечное сечение, равная в первом приближении сумме членов ряда в правой части формулы (14), содержащих вторые и четвертые производные по переменным  $x$ ,  $r_1$  и  $r_2$ , а  $\Delta$  представляет собой относительную поправку.

Для вычисления этой поправки необходимо в формуле (14) вычислить все входящие в нее производные, что может быть сделано дифференцированием функции  $F$ . Однако такое дифференцирование по переменным  $r_1$  и  $r_2$  приводит к слишком сложным выражениям, так как величина  $\rho$ , входящая в знаменатели в формуле (4), зависит от  $r_1$  и  $x$ , а именно:

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + x^2}. \quad (16)$$

Ввиду этого для упрощения вычислений желательно все искомые производные выразить через производные по одной переменной. За такую переменную может быть принята, например,

$$y = \frac{x}{R}, \text{ где } R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Тогда

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{R} \frac{dF}{dy}$$

и

$$\frac{d^n F}{dx^n} = \frac{1}{R^n} \frac{d^n F}{dy^n}.$$

Аналогично и все остальные производные по другим переменным могут быть выражены через производную  $\frac{dF}{dy}$ .

#### § 4. Преобразование выражения для $F$

Для удобства дифференцирования функции  $F$  по переменным  $r_1$  и  $r_2$  преобразуем выражение для  $F$  в формуле (2).

Взаимная индуктивность  $M$  двух coaxиальных витков имеет вид\*

$$M = 4\pi^2 \sqrt{r_1 r_2} \left[ \frac{2}{\pi k} (K - E) - \frac{k}{\pi} K \right] = 4\pi^2 \sqrt{r_1 r_2} Q. \quad (17)$$

Здесь через  $Q$  обозначено выражение в квадратной скобке.

Далее имеем:

$$F = \frac{dM}{dx} = \frac{dM}{dk^2} \frac{dk^2}{dx},$$

где

$$\frac{dk^2}{dx} = -k^4 y \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{2r_1 r_2}.$$

\* Л. В. Залуцкий, Введение в теорию ампер-весов, стр. 53—57.



Следовательно,

$$F = -2\pi^2 y k^4 \frac{dQ}{dk^2} \sqrt{\alpha + \frac{1}{\alpha}}, \quad (18)$$

где  $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$ . Обозначая далее  $\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \beta$ , будем иметь:

$$F = -2\sqrt{2}\pi^2 y k^4 \frac{dQ}{dk^2} (1-\beta^2)^{-\frac{1}{4}}. \quad (18a)$$

Имея в виду, что  $(1-\beta^2)^{-1/4} = \varphi(\alpha)$  и  $k^4 \frac{dQ}{dk^2} = \psi(k^2)$ , можно написать:

$$F = -2\sqrt{2}\pi^2 y \varphi(\alpha) \psi(k^2). \quad (18b)$$

Из формулы (18b) следует, что  $F$  зависит только от  $y$  и  $\alpha$ . В дальнейших выводах знак минус перед выражением  $F$  можно опустить.

### § 5. Преобразование производных функции $F$ по переменным $r_1$ и $r_2$ через производные по переменной $y$

В последующем изложении будем пользоваться следующими обозначениями для производных:

$$\frac{dF}{dy} = F'_y, \quad \frac{dF}{dr_1} = F'_{r_1}, \quad \frac{dF}{d\alpha} = F'_\alpha \text{ и т. д.}$$

Производя дифференцирование по  $y$  и  $\alpha$ , получим:

$$F'_y = 2\sqrt{2}\pi^2 \left[ \varphi(\alpha) \psi(k^2) + y \varphi(\alpha) \psi'_{k^2}(k^2) \frac{dk^2}{dy} \right], \quad (19)$$

$$F'_\alpha = 2\sqrt{2}\pi^2 \left[ y \varphi'_\alpha(\alpha) + y \varphi(\alpha) \psi'_{k^2}(k^2) \frac{dk^2}{d\alpha} \right]. \quad (19a)$$

Имея в виду, что  $k^2 = \frac{4\alpha}{(1+y^2)(1+\alpha^2)+2\alpha}$ , простым дифференцированием получим следующие выражения:

$$\frac{d(k^2)}{dy} = -\frac{8\alpha(1+\alpha^2)y}{[(1+y^2)(1+\alpha^2)+2\alpha]^2} \quad (20)$$

и

$$\frac{d(k^2)}{d\alpha} = \frac{4(1+y^2)(1-\alpha^2)}{[(1+y^2)(1+\alpha^2)+2\alpha]^2}. \quad (20a)$$

Умножая  $F'_y$  на  $\frac{d(k^2)}{dx}$  и  $F'_x$  на  $\frac{d(k^2)}{dy}$  и вычитая одно произведение из другого, получим:

$$\frac{F'_y(1+y^2)(1-\alpha^2) + F'_x\alpha(1+\alpha^2)2y}{[(1+y^2)(1+\alpha^2) + 2\alpha]^2} = \\ = 2\sqrt{2}\pi \left[ \varphi(\alpha) f(k^2) \frac{dk^2}{dx} - y\varphi'_\alpha(\alpha) \frac{dk^2}{dy} \right].$$

Так как  $\varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2 \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}}}$ , то, подставляя в правую часть

предыдущего уравнения вместо  $\frac{dk^2}{dx}$ ,  $\frac{dk^2}{dy}$  и  $\varphi'_\alpha(\alpha)$  их значения, после некоторых преобразований получим:

$$F'_y(1+y^2)(1-\alpha^2) - F'_x\alpha(1+\alpha^2)2y = \frac{1-\alpha^2}{y} F. \quad (21)$$

Формула (21) дает возможность выразить  $F'_x$  и далее  $F'_{r_1}$  и  $F'_{r_2}$  через  $F$  и  $F'_y$ .

### § 6. Вычисление производных от функции $F$

Вычислим  $F'_{r_1}$  и  $F'_{r_2}$ , а также  $F''_{r_1}$  и  $F''_{r_2}$ . Так как  $y$  и  $\alpha$  являются функциями  $r_1$ , то

$$F'_{r_1} = F'_y \frac{dy}{dr_1} + F'_\alpha \frac{d\alpha}{dr_1} \quad (22)$$

и аналогично

$$F'_{r_2} = F'_y \frac{dy}{dr_2} + F'_\alpha \frac{d\alpha}{dr_2}. \quad (22a)$$

Имея в виду, что  $\frac{dy}{dr_1} = \frac{dy dR}{dR dr_1} = -\frac{y r_1}{R^2}$  и  $\frac{d\alpha}{dr_1} = -\frac{r_2}{r_1^2}$ , и заменяя  $F'_\alpha$  по формуле (21), найдем

$$F'_{r_1} = -\frac{r_2 y}{R^2} F'_y - \frac{r_2}{r_1^2} \left[ \frac{F(1-\alpha^2) - F'_y y(1+y^2)(1-\alpha^2)}{2y^2\alpha(1+\alpha^2)} \right], \quad (23)$$

или после некоторых преобразований получим:

$$F'_{r_1} = \frac{r_1}{2yR^2} (1-y^2-\alpha^2 y^2) F'_y - \frac{r_1(1-\alpha^2)}{2y^2 R^2} F.$$

Обозначая для простоты коэффициенты при  $F'_y$  и  $F$  соответственно через  $B_1$  и  $C_1$ , будем иметь:

$$F'_{r_1} = B_1 F'_y + C_1 F, \quad (23a)$$

где

$$B_1 = \frac{r_1}{2y^2 R^2} (1 - y^2 - \alpha^2 - \alpha^2 y^2) \quad (24)$$

и

$$C_1 = \frac{r_1 (1 - \alpha)^2}{2y^2 R^2}. \quad (25)$$

Оба коэффициента принимают более простую форму, если сделать замену  $\alpha$  через  $\beta$  по формуле:

$$\beta = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2},$$

а именно:

$$B_1 = \frac{\beta - y^2}{2r_1 y}, \quad (24a)$$

$$C_1 = -\frac{\beta}{2r_1 y^2}. \quad (25a)$$

Выражение для  $F_{r_1}''$ , в соответствии с принятыми обозначениями, примет следующий вид:

$$F_{r_1}'' = F_y' \frac{dB}{dr_1} + F_{yy}'' B_1 \frac{dy}{dr_1} + F_{yy}'' B_1 \frac{d\alpha}{dr_1} + F \frac{dC_1}{dr_1} + F_y' C_1 \frac{dy}{dr_1} + F_{yy}'' C_1 \frac{d\alpha}{dr_1}. \quad (26)$$

Коэффициенты при функции  $F$  и ее производных в формуле (26) имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB_1}{dr_1} &= \frac{1}{4r_1^2 y} [2(1 + y^2) + (1 + \beta)(y^2 - \beta)]; \\ \frac{dC_1}{dr_1} &= -\frac{1}{2r_1^2 y^2}; \\ B_1 \frac{dy}{dr_1} &= \frac{y^2 - \beta}{2R^2}; \quad B_1 \frac{d\alpha}{dr_1} = -\frac{\alpha(\beta - y)^2}{2r_1^2 y}; \\ C_1 \frac{dy}{dr_1} &= \frac{\beta}{2yR^2}; \quad C_1 \frac{d\alpha}{dr_1} = \frac{\beta\alpha}{2r_1^2 y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Выражение  $F_{yy}''$  получается непосредственно из формулы (21) и, наконец, выражение  $F_{yy}''$  получается дифференцированием  $F_{yy}''$  по переменной  $y$ , так как  $F_{yy}'' = F_{yy}''$ . Производя эту операцию, получим:

$$F_{yy}'' = \frac{\beta}{\alpha y} \left[ -\frac{(1 + y^2)}{2} F_y'' + \frac{(2 - y^2)}{2y} F_y' - \frac{1}{y^2} F \right]. \quad (28)$$

Подставляя в формулу (26) значения коэффициентов (27), а также  $F_{yy}''$  из формулы (21) и  $F_{yy}''$  из уравнения (28), после

простых алгебраических преобразований получим следующее выражение для  $F''_{r_1}$ :

$$F''_{r_1} = \gamma_{11}(y, \beta) F''_y + \gamma_1(y, \beta) F'_y + \gamma_0(y, \beta) F, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(y, \beta) &= \frac{1}{4r_1^2} \left[ y - \frac{\beta}{y} \right]^2, \\ \gamma_1(y, \beta) &= \frac{1}{2r_1^2} \left[ \frac{1+\beta}{y} + \frac{3}{2}y - \frac{3\beta^2}{y^3} \right], \\ \gamma_0(y, \beta) &= -\frac{\beta}{2r_1^2 y^2} + \frac{1}{2r_1^2 y^2} \left[ \frac{3\beta^2}{2y^2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогично найдем и выражение для  $F''_{r_2}$ , которое будет отличаться от  $F''_{r_1}$  тем, что постоянная  $\beta$  будет иметь другой знак, т. е.

$$F''_{r_2} = \bar{\gamma}_{11}(y, \beta) F''_y + \bar{\gamma}_1(y, \beta) F'_y + \bar{\gamma}_0(y, \beta) F, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{11}(y, \beta) &= \frac{\left[ y + \frac{\beta}{y} \right]^2}{4r_2^2}, \\ \bar{\gamma}_1(y, \beta) &= \frac{1}{2r_2^2} \left[ \frac{1-\beta}{y} + \frac{3}{2}y - \frac{3\beta^2}{y^3} \right], \\ \bar{\gamma}_0(y, \beta) &= \frac{\beta}{2r_2^2 y^2} + \frac{1}{2r_2^2 y^2} \left[ \frac{3\beta^2}{2y^2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Полученные формулы позволяют вычислить поправочный член на конечные площади поперечного сечения катушек для силы взаимодействия между ними. Действительно, из формулы (14), ограничиваясь членами, содержащими производные второго порядка, будем иметь для относительной поправки следующее выражение:

$$\Delta = \frac{1}{6} \left[ (b_1^2 + b_2^2) \frac{F''_x}{F} + \frac{1}{6} \left( c_1^2 \frac{F''_{r_1}}{F} + c_2^2 \frac{F''_{r_2}}{F} \right) \right], \quad (33)$$

Подставляя сюда вместо  $F''_{r_1}$  и  $F''_{r_2}$  их выражения (29) и (31) и замечая, что  $F''_x = \frac{1}{R^2} F''_y$ , получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{6} \left( \frac{b_1^2 + b_2^2}{R^2} + c_{11}^2 \gamma_{11} + c_{21}^2 \bar{\gamma}_{11} \right) \frac{F''_y}{F} + \\ &+ \frac{1}{6} (c_{11}^2 \gamma_1 + c_{21}^2 \bar{\gamma}_1) \frac{F'_y}{F} + \frac{1}{6} (c_{11}^2 \gamma_0 + c_{21}^2 \bar{\gamma}_0). \end{aligned} \quad (34)$$

Задача вычисления поправочного члена будет решена, если определить  $\frac{F'_y}{F}$  и  $\frac{F''_y}{F}$ .

### § 7. Вычисление $\frac{F'_y}{F}$ и $\frac{F''_y}{F}$

Для дальнейших вычислений воспользуемся выражением (18а), в котором постоянный член  $-2\sqrt{2\pi^2(1-\beta^2)}^{-\frac{1}{4}}$  обозначим через  $\alpha$ ; тогда

$$F = \alpha y k^4 \frac{dQ}{dk^2}, \quad (35)$$

где

$$Q = \frac{2}{\pi k} [K - E] - \frac{k}{\pi} K. \quad (36)$$

Искомые отношения, входящие в формулу (34), находятся из дифференциальных уравнений, связывающих  $F'_y$ ,  $F''_y$  и  $F$ . Эти уравнения получаются простым дифференцированием по переменной  $y$  равенства (35). Для последующих вычислений необходимо знать также зависимость, связывающую функцию  $Q$  и ее производные  $Q_{k^2}$  и  $Q''_{k^2}$ , которая находится двукратным дифференцированием уравнения (36).

При дифференцировании этого уравнения понадобятся выражения производных эллиптических интегралов  $K$  и  $E$  по переменной  $k^2$ . Имея в виду, что

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1}{k(1-k^2)} (E - (1-k^2)K)$$

и

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k} (E - K),$$

находим:

$$\frac{dK}{dk^2} = \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dk^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{E}{1-k^2} - K \right\}$$

и

$$\frac{dE}{dk^2} = \frac{dE}{dk} \frac{dk}{dk^2} = \frac{1}{2k^2} (E - K).$$

Двукратным дифференцированием уравнения (36) получим:

$$Q_{k^2} = \frac{1}{2\pi k(1-k^2)} E - \frac{1}{\pi k^3} (K - E) \quad (37)$$

и

$$Q''_{k^2} = \frac{5k^2 - 3}{4\pi k^3(1-k^2)} E + \frac{6 - 7k^2}{4\pi k^5(1-k^2)} (K - E). \quad (38)$$

Далее, исключая из уравнений (36) и (37), а также (37) и (38) интеграл  $K$ , будем иметь:

$$E = \left[ Q_{k^2} + \frac{Q}{k^2(2-k^2)} \right] \frac{2\pi(1-k^2)(2-k^2)}{k}$$

и

$$E = \left[ Q_{k^2} + \frac{6-7k^2}{4k^2(1-k^2)} Q_{k^2} \right] \frac{8\pi k(1-k^2)^2}{3}.$$

Приравняв правые части этих выражений, после элементарных упрощений получим следующее дифференциальное уравнение:

$$k^4(1-k^2)Q_{k^2}' = k^4Q_{k^2} + \frac{3}{4}Q. \quad (39)$$

Для нахождения дифференциального уравнения, связывающего  $F$ ,  $F_y$  и  $F_y''$ , дифференцируем дважды уравнение (35) по переменной  $y$ .

Первое дифференцирование дает:

$$F_y' = a \left[ \left( k^4 - \frac{2k^2y^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) Q_{k^2} - \frac{y^2k^2}{\sqrt{1-\beta^2}} Q'k^2 \right].$$

Заменяя  $Q_{k^2}$  и  $Q_{k^2}'$  из уравнений (35) и (39) их значениями, получим:

$$F_y' = F \left( \frac{1}{y} - \frac{2k^2y}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{yk^4}{(1-k^2)\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \frac{3a}{4\sqrt{1-\beta^2}} \frac{y^2k^4}{(1-k^2)} Q. \quad (40)$$

После второго дифференцирования и замены  $Q_{k^2}$  через  $F$  это уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} F_y'' &= \frac{F_y'}{y} - \frac{F}{y^2} - \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( k^2F + k^2yF_y' - \frac{y^2k^4}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \frac{k^4}{1-k^2}F + \frac{yk^4}{1-k^2}F_y' - \frac{y^2k^2(2-k^2)}{\sqrt{1-\beta^2}(1-k^2)^2}F \right] - \\ &- \frac{3a}{4\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \frac{2yk^4}{1-k^2}Q + \frac{y}{a(1-k^2)}F - \frac{y^2k^2(2-k^2)}{\sqrt{1-\beta^2}(1-k^2)^2}Q \right] \dots \quad (41) \end{aligned}$$

Исключая из уравнений (40) и (41) функцию  $Q$ , после приведения подобных членов будем иметь:

$$\begin{aligned} F_y'' &= \left[ \frac{3}{y} - \frac{2yk^2(2-k^2)}{\sqrt{1-\beta^2}(1-k^2)} \right] F_y' + \\ &+ \left[ \frac{16k^2-8k^4-3y}{4\sqrt{1-\beta^2}(1-k^2)} - \frac{2yk^4}{(1-\beta^2)(1-k^2)} - \frac{3}{y^2} \right] F. \quad (41a) \end{aligned}$$

Заменяя  $k$  его выражением через  $y$  и  $\beta$ , получим:

$$F'_y = \left[ \frac{3\beta^2 - 2y^2 - 5y^4}{y(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} \right] F'_y + \left[ \frac{2y^2 - 3\beta^2}{y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} - \frac{6y^4(1 + \sqrt{1 - \beta^2})(1 + y^2) - 12\sqrt{1 - \beta^2}y^4 - 3y^4(y^4 - \beta^2)}{4\sqrt{1 - \beta^2}y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} \right] F. \quad (416)$$

### § 8. Выражение для поправочного члена $\Delta$

Уравнение (41) позволяет выразить поправочный член  $\Delta$  в функции лишь  $F'_y$  и  $F$ . Действительно, подставляя в уравнении (34) вместо  $F'_y$  ее значение, получим следующее выражение для  $\Delta$ :

$$\Delta = \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{b_1^2 + b_2^2}{R^2} + c_{11}^2 \bar{\gamma}_{11} + c_{21}^2 \bar{\gamma}_{11} \right) \left( -\frac{\lambda_2}{y^2} \right) + \frac{1}{6} (c_{11}^2 \bar{\gamma}_1 + c_{21}^2 \bar{\gamma}_1) \frac{\lambda_1}{y} + \frac{1}{6} (c_{11}^2 \bar{\gamma}_0 + c_{21}^2 \bar{\gamma}_0) \right], \quad (42)$$

где

$$\frac{\lambda_1}{y} = \frac{F'_y}{F}$$

и

$$\frac{\lambda_2}{y^2} = -\frac{F'_y}{F} = \frac{3\beta^2 - 2y^2}{y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} + \frac{6y^4(1 + \sqrt{1 - \beta^2})(1 + y^2) - 12y^4\sqrt{1 - \beta^2} - 3y^4(y^4 - \beta^2)}{4\sqrt{1 - \beta^2}y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} + \frac{5y^4 + 2y^2 - 3\beta^2}{y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} \lambda_1.$$

При измерениях силы тока катушка токовых весов устанавливается в положении, когда  $F = F_{\max}$ . В этом случае  $F'_y = 0$ , и поэтому выражение (42) представляется в следующем виде:

$$\Delta = \frac{1}{6} (c_{11}^2 \bar{\gamma}_0 + c_{21}^2 \bar{\gamma}_0) + \frac{1}{6} \left( \frac{b_1^2 + b_2^2}{R^2} + c_{11}^2 \bar{\gamma}_{11} + c_{21}^2 \bar{\gamma}_{11} \right) \times \left( \frac{2y^2 - 3\beta^2}{y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} - \frac{6y^4(1 + \sqrt{1 - \beta^2})(1 + y^2) - 12y^4\sqrt{1 - \beta^2} - 3y^4(y^4 - \beta^2)}{4\sqrt{1 - \beta^2}y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} \right). \quad (42a)$$

Значения  $\bar{\gamma}_0$ ,  $\bar{\gamma}_{11}$ ,  $\bar{\gamma}_0$  и  $\bar{\gamma}_{11}$  находятся по формулам (30) и (32).

### § 9. Выражение для максимума силы между двумя круговыми контурами конечного сечения

Предположим, что взаимодействуют два витка сечениями  $2b_1 \times 2c_1$  и  $2b_2 \times 2c_2$  при протекании по ним токов, равных единице:

$$f = F(1 + \Delta). \quad (43)$$

В формуле (43)  $F$  — сила взаимодействия между линейными круговыми токами с отношением радиусов  $\alpha$  и  $f$  — сила взаимодействия между токами той же силы, протекающими по кругам конечного сечения, но с тем же отношением  $\alpha$  их средних радиусов. Опытным путем может быть установлено однозначным образом вполне определенное взаимное положение катушек, при котором их сила взаимодействия максимальна.

Если расстояние для этого случая обозначить через  $x_m$ , то  $\frac{x_m}{r_1}$  будет функцией  $\alpha$ , причем вид этой функции с достаточным приближением дается формулой (9).

Следовательно, вместо непосредственного измерения величины  $x_m$ , которого нельзя осуществить путем опыта, можно установить положение, для которого  $\frac{x_m}{r_1}$  определяется по формуле (9).

Строго говоря, такой опыт должен был бы относиться к двум линейным круговым виткам. Когда же опыт производится с катушками конечного сечения, то расстояние между средними плоскостями, соответствующее максимуму функции  $f$ , будет  $x_0 = x_m + \delta x_m$ , так как максимумы  $F$  и  $f$  будут иметь место при различных значениях  $x$ , вследствие наличия множителя  $(1 + \Delta)$  в формуле (43).

Из приведенных рассуждений следует, что сила  $f(y_m)$ , вычисленная по формуле:

$$f(y_m) = F(y_m) [1 + \Delta], \quad (44)$$

не будет соответствовать реально установленным на максимум взаимодействия катушкам, вследствие чего

$$f'(y_m) \neq 0, \text{ хотя } F'(y_m) = 0.$$

В самом деле, для расстояния между средними плоскостями катушек имеем:  $x_0 = x_m + \delta x_m$  и тогда

$$f(y_0) = F(y_0) [1 + \Delta],$$

где  $f'(y_0) = 0$  и  $F'(y_0) \neq 0$ .

Задача заключается в том, чтобы оценить величину  $\delta x_m$  и ту погрешность, которую она внесет в поправочный член  $\Delta$ .



Разложим функцию  $f(y_0)$  в ряд по степеням  $\delta y_m$ :

$$f(y_0) = f(y_m + \delta y_m) = f(y_m) + \delta y_m f'(y_m) + \frac{(\delta y_m)^2}{2} f''(y_m) + \dots \quad (45)$$

Но

$$f(y_m) = F(y_m) [1 + \Delta]$$

и, следовательно,

$$f'(y_m) = F'(y_m) [1 + \Delta] + \Delta' F(y_m)$$

и

$$f''(y_m) = F''(y_m) [1 + \Delta] + 2\Delta' F'(y_m) + \Delta'' F(y_m).$$

Имея в виду, что  $F'(y_m) = 0$ , получим:

$$f(y_0) = F(y_m) [1 + \Delta] + F(y_m) \Delta' \delta y_m + F''(y_m) [1 + \Delta] \frac{(\delta y_m)^2}{2} + \Delta'' F(y_m) \frac{(\delta y_m)^2}{2}, \quad (46)$$

или, ограничиваясь членами со степенями  $\delta y_m$  не выше первой, имеем:

$$f(y_0) = F(y_m) [1 + \Delta + \Delta' \delta y_m]. \quad (46a)$$

Для того чтобы найти  $\delta y_m$ , необходимо выражение  $f(y_0)$  продифференцировать по переменной  $y$ , причем оно должно содержать и первые производные  $F(y_m)$ .

Напишем уравнение (46) в следующей форме:

$$f(y_0) = F(y_m) [1 + \Delta] + \delta y_m (F(y_m) [1 + \Delta])' = f(y_m) [1 + \Delta] + \delta y_m F'(y_m) [1 + \Delta] + \Delta' F(y_m) \delta y_m. \quad (47)$$

Дифференцируя равенство (47) и полагая  $F'(y_m) = f'(y_0) = 0$ , получим с точностью до членов первого порядка:

$$f'(y_0) = \Delta' F(y_m) + \delta y_m [1 + \Delta] F''(y_m) + \Delta'' F(y_m) \delta y_m = 0, \quad (48)$$

откуда

$$\delta y_m = - \frac{\Delta'}{\Delta'' + \frac{F''(y_m)(1 + \Delta)}{F(y_m)}}.$$

Полагая, как и ранее,

$$\frac{F''(y_m)}{F(y_m)} = - \frac{\lambda_2}{y_m^2},$$

получим:

$$\delta y_m = \frac{\Delta' y_m^2}{\lambda_2 (1 + \Delta) - \Delta'' y_m^2}. \quad (49)$$

Имея в виду, что  $\delta y_m = \delta y_0 = \delta y$ , получим выражение  $f(y_0)$  в следующем виде:

$$f(y_0) = F(y_m) \left[ 1 + \Delta + \frac{(\Delta' y_m)^2}{\lambda_2 (1 + \Delta) - \Delta'' y_m^2} \right]. \quad (50)$$

Таким образом, применение формулы (43) для расчета максимума силы взаимодействия катушек должно сопровождаться введением добавочного члена  $\frac{F(\Delta' y_m)^2}{\lambda_2 (1 + \Delta) - \Delta'' y_m^2}$ , учитывающего изменение расстояния между средними плоскостями при максимуме взаимодействия, вызываемого конечностью сечения катушек.

### § 10. Погрешности в определении максимума силы

Величина  $f$ , как следует из вышеприведенных формул для случая максимального взаимодействия, вычисляется по данным  $y_m$  и  $a$ , определяемым косвенными экспериментальными методами, и по размерам поперечных сечений  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$ , определяемым путем непосредственных измерений. Так как все эти величины определяются с некоторой погрешностью, то ошибки в определении их внесут погрешность в значение вычисленной  $f$ .

Ниже приводится вычисление этой погрешности.

#### а) Погрешность от неточности взаимной установки катушек

Пусть катушки установлены в положение максимума взаимодействия с погрешностью  $\delta x$ . Соответствующую ей погрешность в значении  $y$  обозначим через  $\delta y$ .

Тогда по формуле Тейлора можно написать:

$$f(y + \delta y) - f(y) = f'(y) \delta y + f''(y) \frac{(\delta y)^2}{2},$$

откуда

$$\frac{\delta_y f}{f} = \frac{f''(y)}{f'(y)} \frac{(\delta y)^2}{2}, \quad (51)$$

так как  $f'(y) = 0$ .

При том же условии, согласно формуле (41б),

$$\frac{f''(y)}{f'(y)} = - \frac{3\beta^2 - 2y^2}{y^2(y^4 + 2y^2 + \beta^2)} - \frac{6y^2(1 + \sqrt{1 - \beta^2})(1 + y^2) - 12y\sqrt{1 - \beta^2} - 3y^2(y^4 - \beta^2)}{4\sqrt{1 - \beta^2}(y^4 + 2y^2 + \beta^2)y^2}. \quad (52)$$

Подставляя это значение в формулу (51), получим выражение для относительной погрешности  $f(y)$ , зависящей от неточности взаимной установки катушек по их оси.

*б) Погрешность в определении силы  $f$ , происходящая из-за неточности определения  $a$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$*

Самое общее выражение для малых изменений  $f$ , в зависимости от малых изменений  $a$ ,  $c_i$  и  $b_i$ , с точностью до величины второго порядка малости по сравнению с  $\delta a$ ,  $\delta c_i$  и  $\delta b_i$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta f &= \delta_a f + \sum_{i=1}^2 \delta_{c_i} f + \sum_{i=1}^2 \delta_{b_i} f = \\ &= F'_a v \delta a + v' F \delta a + \sum_{i=1}^1 F'_{c_i} v \delta c_i + \sum_{i=1}^2 v'_{c_i} F \delta c_i + \\ &+ \sum_{i=1}^2 F'_{b_i} v \delta b_i + \sum_{i=1}^2 v'_{b_i} F \delta b_i, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$v \approx 1 + \Delta \quad \text{и} \quad v' = \Delta'.$$

Имея в виду, что  $F$  не зависит от  $c_i$  и  $b_i$ , находим относительное изменение  $f$ :

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{F'_a}{F} \delta a + \frac{\Delta' a}{1 + \Delta} \delta a + \sum_{i=1}^2 \Delta'_{c_i} \frac{\delta c_i}{1 + \Delta} + \sum_{i=1}^2 \Delta'_{b_i} \frac{\delta b_i}{1 + \Delta}. \quad (53a)$$

В дальнейшем, с точностью до величины второго порядка малости,  $1 + \Delta$  в знаменателе может быть заменено единицей.

Прежде чем вычислять коэффициенты при  $\delta a$  в правой части равенства (53a), сделаем некоторые замечания относительно первых двух коэффициентов при  $\delta a$ ,  $\delta c_i$ ,  $\delta b_i$ .

По формуле (21) имеем:

$$F'_y (1 + y^2) (1 - a^2) + F'_a (1 + a^2) 2y = \frac{1 - a^2}{y} F.$$

Так как для рассматриваемого случая  $F'_y = 0$ , то

$$\frac{F'_a}{F} = \frac{\beta}{2y^2 a}. \quad (54)$$

Вместо того чтобы вычислить величину  $\Delta'_a$ , которая учитывает изменение  $a$ , происходящее от конечности сечения,

введем эту поправку непосредственно, исходя из выражения для  $\alpha$ , имеющего следующий вид:

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1} = \frac{c_2 l_2}{w_1 l_1} \left[ 1 - \left( \frac{c_1^2}{3r_1^2} - \frac{b_1^2}{2r_1^2} - \frac{c_2^2}{3r_2^2} + \frac{b_2^2}{2r_2^2} \right) \right], \quad (55)$$

где  $r_1, r_2, c_1, c_2, b_1$  и  $b_2$  имеют прежние значения.

Обозначая  $\frac{w_2 l_2}{w_1 l_1}$  через  $\alpha_0$ , имеем:

$$\frac{\delta \alpha}{\alpha} = \frac{\delta \alpha_0}{\alpha_0} - \frac{\frac{2c_1^2}{3r_1^2} \delta c_1 - \frac{b_1^2}{r_1^2} \delta b_1 - \frac{2c_2^2}{3r_2^2} \delta c_2 + \frac{b_2^2}{r_2^2} \delta b_2}{1 - \left( \frac{c_1^2}{3r_1^2} - \frac{b_1^2}{2r_1^2} - \frac{c_2^2}{3r_2^2} + \frac{b_2^2}{2r_2^2} \right)}. \quad (56)$$

Для учета относительной погрешности в определении  $\alpha$  в знаменателе многочлена правой части формулы (56) суммой членов в скобке можно пренебречь ввиду ее малости по сравнению с единицей, и тогда имеем:

$$\frac{\delta \alpha}{\alpha} = \frac{\delta \alpha_0}{\alpha_0} - \frac{2c_1^2}{3r_1^2} \cdot \frac{\delta c_1}{c_1} + \frac{b_1^2}{r_1^2} \frac{\delta b_1}{b_1} + \frac{2c_2^2}{3r_2^2} \frac{\delta c_2}{c_2} - \frac{b_2^2}{r_2^2} \frac{\delta b_2}{b_2}. \quad (56a)$$

Полученное выражение для  $\frac{\delta \alpha}{\alpha}$  вместе с формулой (54) исчерпывает задачу вычисления суммы двух членов  $\frac{F'_2}{F} \delta \alpha + \frac{\Delta'_2}{1 + \Delta} \delta \alpha$ , входящих в правую часть равенства (53a).

Далее находим:

$$\sum_{l=1}^2 \Delta'_{c_l} \delta c_l = \frac{1}{3} \left( \gamma_0 - \frac{\lambda_2}{y^2} \gamma_{11} \right) c_1 \delta c_1 + \frac{1}{3} \left( \bar{\gamma}_0 - \frac{\lambda_2}{y^2} \bar{\gamma}_{11} \right) c_2 \delta c_2 \quad (57)$$

и

$$\sum_{l=1}^2 \Delta'_{b_l} \delta b_l = - \frac{\lambda_2}{3y^2 (r_1^2 + r_2^2)} (b_1 \delta b_1 + b_2 \delta b_2). \quad (57a)$$

Исходя из полученных выражений для отдельных коэффициентов, относительную погрешность вычисления  $f$  можно представить в следующем виде:

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\beta}{2y^2} \frac{\delta \alpha_0}{\alpha_0} + \frac{b_1^2}{2y^2 r_1^2} \left[ \beta - \frac{\lambda_2 (1 + \beta)}{3} \right] \frac{\delta b_1}{b_1} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{b_2^2}{2y^2 r_1^2} \left[ \beta + \frac{\lambda_2(1-\beta)}{3} \right] \frac{\delta b_2}{b_2} + \frac{c_1^2}{3} \left[ \gamma_0 - \frac{\lambda_2}{y^2} \gamma_{11} - \frac{\beta}{y^2 r_1^2} \right] \frac{\delta c_1}{c_1} + \\
 & + \frac{c_2^2}{3} \left[ \gamma_0 - \frac{\lambda_2}{y^2} \gamma_{11} + \frac{\beta}{y^2 r_2^2} \right] \frac{\delta c_2}{c_2}. \quad (58)
 \end{aligned}$$

Формула (58) является наиболее общим выражением для погрешности, с которой вычисляется сила взаимодействия между многослойными катушками и которая зависит от погрешностей определения отношения эквивалентных радиусов  $\alpha$ , а также от погрешности определения размеров сечения катушек.

Изложенный выше расчет взаимодействия многослойных катушек, обтекаемых токами, показывает, что формула (42) дает выражение поправочного члена на конечность сечения для любого взаимного положения катушек при условии их коаксиальности. Частным случаем формулы (42), осуществленным на опыте, является формула (42а), дающая выражение поправочного члена для такого взаимного положения катушек, при котором их взаимодействие максимально.

Дальнейшим развитием и уточнением формул (42) и (42а) является формула (50) для силы взаимодействия  $F$  между катушками, в которой учтено то, что максимум взаимодействия катушек, определяемый опытным путем, имеет место не при  $x = x_m$  и, следовательно, не при  $y = y_m = 0,5 - 0,45\alpha^2 - 0,0625\alpha^4$ , а при некотором  $x = x_0$ . При этом  $y_m$  и  $y_0$  отличаются на величину

$$\delta y = \frac{\Delta y_m^2}{\lambda_2(1+\Delta) - \Delta y_m^2}.$$

Наконец, выражение (58) позволяет оценить погрешность расчетов, возникающую из-за погрешностей исходных данных.

Полученные результаты исчерпывают в основном теорию расчета электродинамического взаимодействия многослойных катушек и дают возможность проведения численных расчетов постоянной токовых весов, посредством которых устанавливается абсолютная единица силы тока.

## Глава II

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ СРЕДНИХ РАДИУСОВ КАТУШЕК

#### § 1. Общие принципы определения отношения $\frac{R_1}{R_2}$

Измерение средних радиусов  $R_1$  и  $R_2$  чисто механическим путем с необходимой точностью не представляется возможным, так как катушки состоят или из большого числа витков изолированной проволоки круглого сечения, или же из несколь-

ких слоев ленточного провода, и следовательно, контур обмотки не является правильной геометрической фигурой, поддающейся точным измерениям.

Вследствие этого отношение  $\frac{R_1}{R_2}$  определяется магнитоэлектрическим методом с точностью, достаточной для целей абсолютных измерений силы тока.

Принцип этого метода состоит в том, что подвижная и неподвижная катушки устанавливаются коаксиально в плоскости магнитного меридиана, и регулированием тока в обеих катушках производится компенсация магнитного поля, создаваемого током в центре этих катушек. Отсутствие магнитного поля определяется магнитометром, помещенным в центре этих катушек.

Очевидно, что для случая двух линейных круговых токов условием компенсации магнитного поля в центре катушек будет следующее равенство:

$$\frac{2\pi w_1 I_1}{R_1} = \frac{2\pi w_2 I_2}{R_2}, \quad (59)$$

где

$w_1$  и  $w_2$  — число витков,

$I_1$  и  $I_2$  — силы токов, и

$R_1$  и  $R_2$  — радиусы первой и второй катушек.

Из этого равенства следует, что

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1 w_1}{I_2 w_2}, \quad (59a)$$

т. е. отношение радиусов двух контуров равно отношению их числа ампер-витков. Следовательно, измеряя силу тока в каждой из катушек и зная число их витков, можно найти и отношение радиусов:  $\frac{R_1}{R_2} = \alpha$ . Относительная погрешность измерения этого отношения не превосходит суммы относительных погрешностей измерений силы тока. Действительно, из уравнения (59a) имеем:

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} \leq \frac{\Delta I_1}{I_1} + \frac{\Delta I_2}{I_2}.$$

Современные методы измерений позволяют определять силу тока с погрешностью, не превосходящей  $10^{-6}$  его величины; поэтому относительная погрешность определения отношения радиуса катушек этим методом не должна превосходить  $2 \cdot 10^{-6}$ , если только не вносятся другие источники ошибок, связанные с неточностью установки катушек, с вариациями магнитного поля Земли и с нагреванием катушек при прохождении в них тока.

Ввиду того, что катушки, с которыми производятся наблюдения, не являются линейными контурами, и магнит магнитометра имеет конечные размеры, формула (59а) должна быть исправлена введением в нее элементов размера катушек и магнита. Вывод новой формулы уже не является элементарным и требует особого рассмотрения, которое дается в следующем параграфе.

## § 2. Магнитное поле кругового тока

В теории сферических функций доказывается,\* что потенциал, создаваемый любым контуром тока, можно представить в виде ряда, расположенного по сферическим функциям. Этот ряд имеет вид:

$$U = \sum \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \sum (A_n^m \cos m\varphi + B_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta),$$

если  $r > R$ ;

(60)

$$U = \sum r^n \sum (C_n^m \cos m\varphi + D_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta),$$

если  $r < R$ ,

где  $r$  — расстояние от начала координат до точки, в которой рассматривается потенциал;

$R$  — расстояние от начала координат до любой точки контура;

$A, B, C, D$  — постоянные коэффициенты, зависящие от формы проводников, а также от силы тока;

$\varphi$  и  $\theta$  — сферические координаты, из них  $\theta$  — дополнение широты и  $\varphi$  — долгота;

$P_n^m$  — присоединенные полиномы Лежандра.

В случае симметричности потенциала относительно какой-либо оси, что имеет место для кругового контура, выражения (60) упрощаются, если за ось полярных координат принять ось симметрии, а начало координат  $O$  поместить в центр контура (рис. 5), и получают следующий вид:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

если  $r > R$ , и

$$U = \sum B_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (60a)$$

если  $r < R$ , где  $P_n$  — обычные полиномы Лежандра.

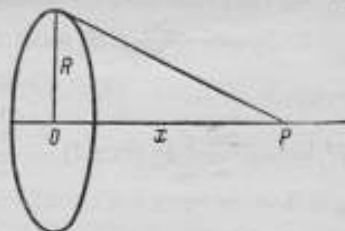


Рис. 5. Круговой контур с точкой  $P$  на оси, в которой определяется напряженность поля

\* См. например, проф. Идельсон, Теория потенциала, ОНТИ, 1936.

Постоянные коэффициенты  $A_n$  можно найти путем сравнения с коэффициентами ряда, которые известны при данном значении угла  $\theta$ .

Если взять точку  $P$  на оси кругового контура, то напряженность магнитного поля  $H$ , как известно из курса элементарной физики, выражается формулой:

$$H = \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

где  $R$  — радиус кругового контура;  
 $x$  — расстояние от центра круга.

Для точек, находящихся вблизи центра окружности, это выражение можно разложить в ряд по степеням  $\frac{x}{R}$ , вынося в знаменателе  $R^2$  за скобки. Тогда имеем:

$$H = \frac{2\pi I}{R} \left[ 1 + \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{2\pi I}{R} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{R^2} + \frac{15}{8} \frac{x^4}{R^4} + \dots \right]. \quad (61)$$

В формуле (60a) для  $r < R$  составляющие  $H$  по направлению  $r$  и по направлению, к нему перпендикулярному, соответственно будут:

$$H_r = - \frac{\partial U}{\partial r} = - \sum B_n n r^{n-1} P_n(\cos \theta),$$

$$H_\theta = - \frac{\partial U}{r \partial \theta} = - \sum B_n r^{n-1} P'_n(\cos \theta).$$

Для точек, находящихся на оси кругового тока,  $r = x$ ,  $\theta = 0$ , и поэтому  $P_n(1) = 1$ , а  $P'_n(1) = 0$ ; следовательно,

$$H_\theta = 0$$

и

$$H_r = H = - \sum B_n n x^{n-1}.$$

Сравнив это выражение с выражением (61), находим:

$$B_1 = - \frac{2\pi I}{R}; \quad B_2 = 0; \quad B_3 = \frac{3\pi I}{R^3}; \quad B_4 = 0; \quad B_5 = - \frac{3\pi I}{4R^5},$$

откуда

$$H_r = - \frac{2\pi I}{R} \left[ P_1(\cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \frac{r^4}{R^4} P_3(\cos \theta) + \dots \right]$$

и

$$H_\theta = \frac{2\pi I}{R} \left[ P'_1(\cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} P'_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \frac{r^4}{R^4} P'_3(\cos \theta) + \dots \right] \quad (62)$$

Для точек, находящихся в плоскости кругового контура, где  $r = y$ ,  $\theta = 90^\circ$ ,  $P_n(0) = 0$ , полиномы  $P'_n(0)$  принимают по-



стоянные значения:  $P_1(0) = 1$ ,  $P_2(0) = 0$ ,  $P_3(0) = -\frac{3}{2}$ ,  $P_4(0) = 0$ ,  $P_5(0) = \frac{15}{8}$ , и следовательно,

$$H_r = 0, \\ H_z = H = \frac{2\pi I}{R} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{y^2}{R^2} + \frac{45}{64} \frac{y^4}{R^4} + \dots \right]. \quad (62a)$$

Формулы (61) и (62) показывают, что поле кругового контура вдоль оси убывает, а вдоль радиуса возрастает от центра к периферии, и следовательно, в центре окружности поле достигает в первом случае максимума и во втором — минимума.

### § 3. Магнитное поле катушки с прямоугольным сечением

Магнитное поле катушки с прямоугольным сечением, площадью  $2b \times 2c$ , находится путем суммирования полей, создаваемых контурами токов, из которых состоит катушка. Если число витков катушки  $w$ , а сила тока в ней  $I$ , то сила тока в каждом элементе контура будет:

$$di = \frac{wl}{2b \times 2c} db_1 dc_1$$

и, следовательно, напряженность поля на оси такого контура будет:

$$dH = \frac{2\pi wl}{4bc} db_1 dc_1 \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (63)$$

где  $R$  и  $z$  — соответственно радиус контура и расстояние его от точки  $P$  (рис. 6), а  $db_1$  и  $dc_1$  — поперечные размеры элементарного контура.

Обозначая радиус среднего контура через  $R_0$  и расстояние его от точки  $P$  через  $z_0$ , имеем:

$$R = R_0 + b_1 \text{ и } z = z_0 + c_1,$$

где  $b_1$  и  $c_1$  — координаты точки  $Q$  относительно начала координат  $O$ , и следовательно,  $\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$  есть вполне определенная функция координат  $b_1$  и  $c_1$  точки  $Q$ , т. е.

$$\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = f(b_1, c_1).$$

Разложение этой функции в ряд Тейлора по степеням  $b$  и  $c$  дает:

$$f(b_1, c_1) = f(R_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial b_1} b_1 + \frac{\partial f}{\partial c_1} c_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2} b_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2} c_1^2 + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial c_1} b_1 c_1 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial b_1^3} b_1^3 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial c_1^3} c_1^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial b_1^2 \partial c_1} b_1^2 c_1, \dots \quad (64)$$

при этом значения всех производных должны быть взяты в точке  $O$ , т. е. при  $b_1 = c_1 = 0$ , и поэтому они не должны зависеть от  $b_1$  и  $c_1$ .

Подставляя значение функции  $f(b_1, c_1)$  в выражение (63) для  $dH$  и интегрируя его по всему сечению катушки, получим значение напряженности в точке  $P$ , создаваемое катушкой:

$$H = 2\pi I \left[ f + \frac{1}{6} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2} + \frac{1}{6} c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2} + \frac{1}{120} b^4 \frac{\partial^4 f}{\partial b_1^4} + \frac{1}{120} c^4 \frac{\partial^4 f}{\partial c_1^4} + \frac{1}{360} b^2 c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2 \partial c_1^2} \right] \quad (65)$$

Дифференцирование функции  $f$  по  $b_1$  и  $c_1$

равносильно дифференцированию по  $R$  и  $z$ ; поэтому, проведя последовательно операции дифференцирования, получим для центра катушки, где  $z=0$  и  $R=R_0$ , следующее выражение:

$$H = \frac{2\pi I \omega}{R_0} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{b^2}{R_0^2} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{R_0^2} + \frac{1}{5} \frac{b^4}{R_0^4} + \frac{3}{8} \frac{c^4}{R_0^4} - \frac{b^2 c^2}{R_0^4} \right) = \frac{2\pi I \omega}{R_0} (1 + \Delta), \quad (66)$$

где  $\Delta$  — сумма поправочных членов.

#### § 4. Поправочные члены

В качестве индикатора, показывающего степень компенсации полей двух катушек, служит магнит, подвешиваемый на тонкой нити (магнитометр) и устанавливаемый в центре обеих катушек по направлению магнитного меридиана. При этом плоскость катушек устанавливается также в магнитном меридиане. Так как магнит имеет конечные размеры, а магнитное поле в центральной части катушек неоднородно, то при компенсации магнитных полей в центре катушек, т. е. при соблюдении равенства (59а), на концах магнита поле окажется

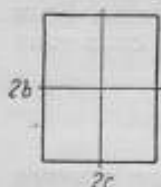
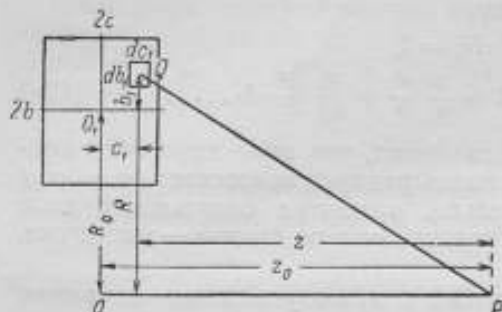


Рис. 6. Прямоугольное сечение многослойной катушки

нескомпенсированным, вследствие чего на магнит будет действовать пара сил и он отклонится от положения равновесия. Чтобы привести его снова в положение равновесия, необходимо изменить силу тока в одной из катушек и тем самым нарушить условие (59а).

Новое условие найдем, если приравняем моменты, действующие на магнит со стороны каждой катушки. Так как магнит располагается в плоскости катушек, то эти моменты  $M_1$  и  $M_2$  соответственно будут:

$$M_1 = 2 \int H_1 r dm, \quad M_2 = 2 \int H_2 r dm,$$

где  $H_1$  и  $H_2$  — напряженность магнитных полей первой и второй катушек;

$r$  — расстояние от центра катушки до любой точки внутри магнита, имеющей магнитную массу  $dm$ .

Приравнявая эти моменты и принимая во внимание формулу (62а) для  $H$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi I_1 \omega_1}{R_1} \left( \int r dm + \frac{3}{4R_1^2} \int r^3 dm + \frac{45}{64R_1^4} \int r^5 dm \right) = \\ & = \frac{4\pi I_2 \omega_2}{R_2} \left( \int r dm + \frac{3}{4R_2^2} \int r^3 dm + \frac{45}{64R_2^4} \int r^5 dm \right). \end{aligned} \quad (67)$$

Интеграл  $2 \int r dm$  представляет собой магнитный момент магнита, т. е. магнитную массу  $m$ , умноженную на двойное расстояние  $l$  от центра магнита до фиктивного полюса, а интегралы  $2 \int r^3 dm$  и  $2 \int r^5 dm$  являются магнитными моментами высших порядков и равны магнитной массе, умноженной на удвоенные третью и пятую степени расстояний  $l'$  и  $l''$  от центра магнита до фиктивных полюсов третьего и пятого порядков.

Поэтому предыдущее выражение напишется в следующем виде:

$$\frac{I_1 \omega_1}{R_1} \left( l + \frac{3}{4R_1^2} l'^3 + \frac{45}{64R_1^4} l''^5 \right) = \frac{I_2 \omega_2}{R_2} \left( l + \frac{3}{4R_2^2} l'^3 + \frac{45}{64R_2^4} l''^5 \right). \quad (67a)$$

Как показывает опыт, без большой погрешности можно положить:

$$l = l' = l'';$$

в таком случае

$$\frac{I_1 \omega_1}{R_1} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{l^3}{R_1^2} + \frac{45}{64} \frac{l^5}{R_1^4} \right) = \frac{I_2 \omega_2}{R_2} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{l^3}{R_2^2} + \frac{45}{64} \frac{l^5}{R_2^4} \right), \quad (67b)$$

или

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1 w_1}{I_2 w_2} \left[ 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) l^2 + \frac{45}{64} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) l^4 \right]. \quad (68)$$

Для того чтобы поправочный член четвертого порядка был меньше  $10^{-6}$  (точность, с которой определяется отношение  $\frac{R_1}{R_2}$ ), необходимо длину магнита  $2L$  выбрать такой, чтобы

$$\frac{45}{64} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) l^4 < 10^{-6}, \quad (69)$$

считая расстояние между полюсами равным длине магнита.

Расстояние между полюсами нам не известно, но его можно определить экспериментально при помощи измерений отношения  $\frac{R_1}{R_2}$  при двух различных углах  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , составляемых осью магнита с магнитным меридианом.

Для этой цели магнит выводят из магнитного меридиана при помощи постоянного магнита или дополнительной катушки на некоторый угол  $\theta$ , и в катушках устанавливается такое соотношение токов  $\frac{I_1}{I_2}$ , при котором магнит магнитометра остается в покое.

Тогда на основании уравнения (62) можно написать для двух углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , с точностью до членов второго порядка, следующие уравнения:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1 w_1}{I_2 w_2} \left[ 1 - \frac{3}{4} l^2 \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) (5 \cos^2 \theta_1 - 1) \right],$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1 w_1}{I_2 w_2} \left[ 1 - \frac{3}{4} l^2 \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) (5 \cos^2 \theta_2 - 1) \right].$$

Решая эти уравнения относительно  $l$ , получим

$$l^2 = \frac{4}{15} \frac{w_2}{w_1} \left[ \frac{R_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2} \left( \frac{I_2}{I_1} - \frac{I_2'}{I_1'} \right) \frac{1}{\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2} \right]. \quad (70)$$

Так как  $l$  необходимо знать с погрешностью, не превышающей нескольких десятых процента, то значения  $R_1$  и  $R_2$  могут быть приняты из геометрических измерений.

Вторая поправка, которую необходимо ввести в формулу (59а), это поправка на размеры поперечного сечения катушки.

Напряженность поля катушки  $H_1$ , имеющей в сечении прямоугольник со сторонами  $2b_1$  и  $2c_1$ , определяется уравнением (66). Такое же уравнение имеет место и для второй

катушки, с размерами поперечного сечения  $2b_2$  и  $2c_2$ . Поэтому, приравняв одно уравнение другому, получим:

$$\frac{2\pi I_1 w_1}{R_1} (1 + \Delta_1) = \frac{2\pi I_2 w_2}{R_2} (1 + \Delta_2),$$

откуда

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1 w_1}{I_2 w_2} (1 + \Delta_1 - \Delta_2). \quad (71)$$

В формуле (71)  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  вычисляются до членов 4-го порядка, так как в реальных конструкциях члены 6-го порядка будут меньше  $10^{-6}$ , что находится за пределами точности измерений.

Формула, учитывающая обе поправки, имеет вид

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1 w_1}{I_2 w_2} \left[ 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) l^2 + \Delta_1 - \Delta_2 \right], \quad (72)$$

где

$$\Delta_1 = \left[ \frac{1}{3} \frac{b_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{c_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{5} \frac{b_1^4}{R_1^4} + \frac{3}{8} \frac{c_1^4}{R_1^4} - \frac{b_1^2 c_1^2}{R_1^4} \right], \quad (73)$$

$$\Delta_2 = \left[ \frac{1}{3} \frac{b_2^2}{R_2^2} - \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{R_2^2} + \frac{1}{5} \frac{b_2^4}{R_2^4} + \frac{3}{8} \frac{c_2^4}{R_2^4} - \frac{b_2^2 c_2^2}{R_2^4} \right]. \quad (73a)$$

### § 5. Способ установки катушек и результаты измерений отношения средних радиусов катушек

Способ установки катушек в одной плоскости основывается на изменении момента вращения, действующего на магнит при смещении центров катушек относительно центра магнита и при поворотах катушек относительно координатных осей. Так, при перемещении центра катушки по оси  $x$ , сохраняя ее плоскость параллельной самой себе, напряженность поля в точке компенсации будет меняться в зависимости от  $x$  по формуле (61), т. е.

$$H_x = \frac{2\pi I}{R} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{R^2} \right).$$

При перемещении же по оси  $y$  изменение будет происходить согласно уравнению (62a):

$$H_y = \frac{2\pi I}{R} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{y^2}{R^2} \right).$$

Следовательно, при перемещении катушек по оси  $x$  поле в точке компенсации будет уменьшаться, имея максимум при совпадении точки компенсации с центром катушки. При пере-

мещении по оси  $y$  поле будет увеличиваться и при совпадении точки компенсации с центром будет иметь минимальное значение. При повороте же плоскости катушки вокруг осей  $z$  и  $y$ , когда центр ее остается неподвижным, составляющая  $H_x$  выразится формулой:

$$H_x = H_x \cos \alpha \cos \beta,$$

где

$H_x$  — составляющая по оси  $x$ , когда ось катушки совпадает с осью  $x$ ;

$\alpha$  — угол поворота вокруг оси  $y$ , а

$\beta$  — угол поворота вокруг оси  $z$  (рис. 7).

Следовательно, максимальное значение  $H$  будет при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ .

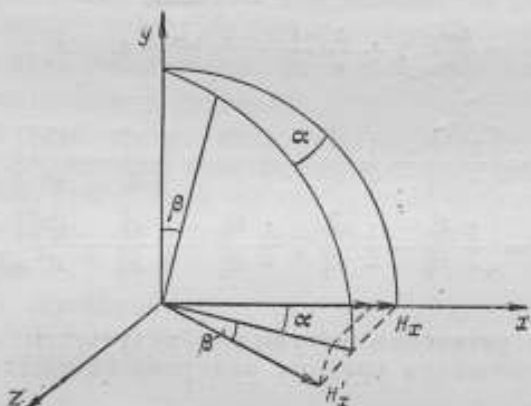


Рис. 7. Система координат, в которой определяется изменение напряженности поля при повороте вокруг осей катушки с током

Отсюда вытекает и сущность метода установки. Положим, что плоскости катушек и центры их совпадают, а величины токов, протекающих через их обмотки, подобраны так, что магнитные поля в их общем центре полностью скомпенсированы. Отношение токов, измеренных в момент компенсации, будет иметь величину, являющуюся экстремальной. Всякое отклонение или смещение той или иной катушки от указанного их расположения вызовет нарушение компенсации магнитных полей. Для ее восстановления необходимо будет изменить величину тока в одной из катушек, вследствие чего и отношение токов изменится. Величина изменения отношения токов будет зависеть от направления и степени смещения катушек относительно друг друга. Таким образом, установка катушек сводится к отысканию экстремального значения отношения сил токов.

Практически установка катушек производится на специальном приборе, который одновременно служит для определения отношения эквивалентных радиусов.

Этот прибор, внешний вид которого показан на рис. 8, представляет собой систему из двух подвижных установочных колец  $A$  и  $B$ , расположенных в вертикальной плоскости и связанных как между собой, так и с неподвижным основанием при помощи особых креплений, подобных шарнирам Гука,

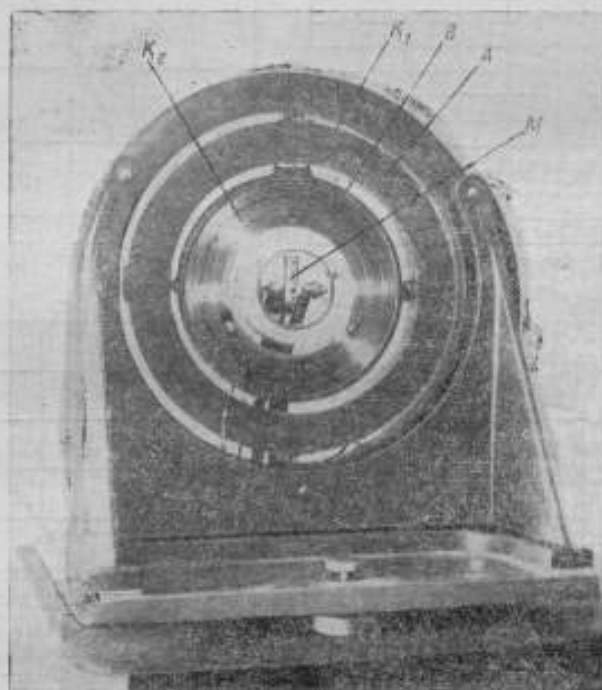


Рис. 8. Общий вид прибора для определения отношения эквивалентных радиусов катушек

и дополнительных приспособлений, которые совместно с шарнирами позволяют установочным кольцам иметь вращательное и поступательное движения. В центре установочных колец смонтирован магнитометр  $M$ , который может перемещаться независимо от установочных колец.

На установочные кольца прибора жестко закрепляются исследуемые подвижная катушка  $K_1$  и неподвижная катушка  $K_2$  токовых весов. Благодаря наличию регулировочных шарниров и креплений обе катушки и магнит магнитометра могут независимо друг от друга перемещаться вдоль координатных осей и независимо друг от друга поворачиваться вокруг тех же осей.

Таким образом, прибор в целом дает возможность выполнить совмещение плоскостей и центров подвижной и неподвижной катушек и магнита магнитометра, т. е. дает возможность осуществить установку, необходимую при определении отношения средних радиусов катушек.

Для работы прибор устанавливается на жестком фундаменте таким образом, чтобы вертикальная плоскость катушек

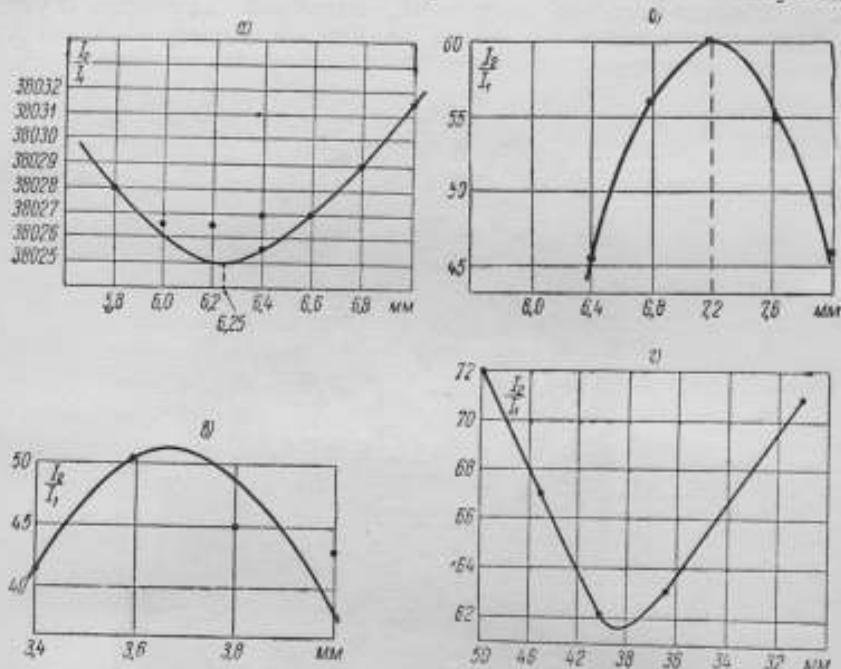


Рис. 9. Графики установки катушек в приборе при определении отношения  $\frac{I_2}{I_1}$  б — то же, вторая установка; в — то же, третья установка; г — то же, чет ж — то же, седьмая установка;

была направлена вдоль магнитного меридиана Земли. Магнит магнитометра при этом, естественно, установится в плоскости катушек.

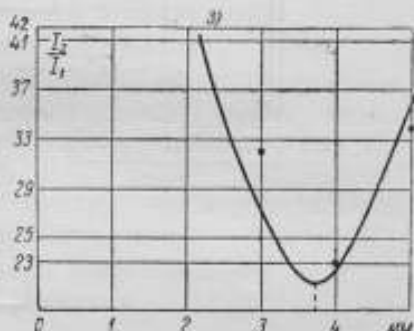
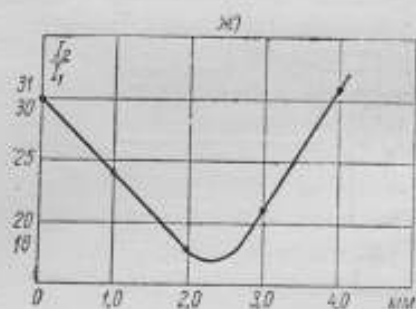
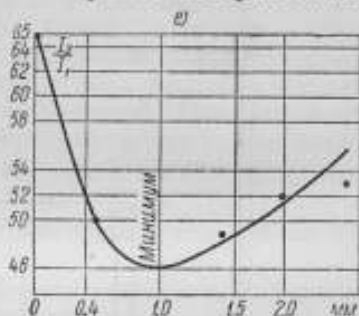
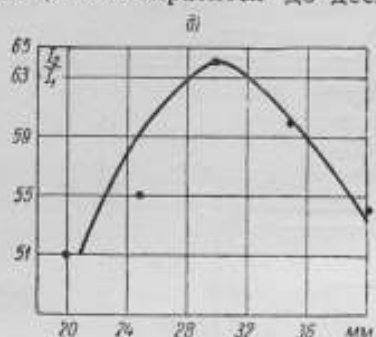
Установка относительного расположения двух катушек и магнитометра, при котором обеспечивается совмещение плоскостей и центров катушек, производится способом последовательного приближения. Три элемента, участвующие в установке, в совокупности могут иметь 18 независимых перемещений, из которых 9 — поступательные и 9 — вращательные.

Для данной цели, однако, нет необходимости пользоваться всеми восемнадцатью перемещениями, так как один из трех элементов, т. е. одну из катушек или магнитометр, можно принять за исходный (заранее считая его установленным),



и число независимых перемещений сократится до двенадцати, из которых 6 — поступательные и 6 — вращательные.

Кроме того, в группу шести вращательных перемещений входят вращения обеих катушек вокруг их собственных осей, которые вследствие симметрии не могут иметь влияния на процесс установки; таким образом, число независимых перемещений сократится до десяти, из которых 6 поступательных



эквивалентных радиусов катушек: а — верхняя катушка, первая установка; вертая установка; б — то же, пятая установка; в — то же, шестая установка; г — то же, восьмая установка

и 4 вращательных. В приборе для установки катушек все эти перемещения производятся независимо друг от друга при помощи микрометрических винтов с нониусами, служащими для учета величины перемещений.

Для установки в требуемом положении поочередно исследуются все отдельные перемещения. С этой целью каждое перемещение производится шагообразно, через определенные интервалы, учитываемые микрометрическими винтами. На каждом интервале в момент компенсации магнитных полей катушек измеряются токи, протекающие по обмоткам, и находится их отношение. Зависимость отношения токов от положения перемещаемого элемента, выраженная графически, дает кривую с наличием максимума или минимума.

Вид этих кривых показан на рис. 9. Наличие минимума или максимума зависит от перемещаемого элемента и направления его перемещения.

Указанная зависимость находится для всех трех элементов относительно каждой координатной оси как для поступательных, так и вращательных перемещений. По этим зависимостям

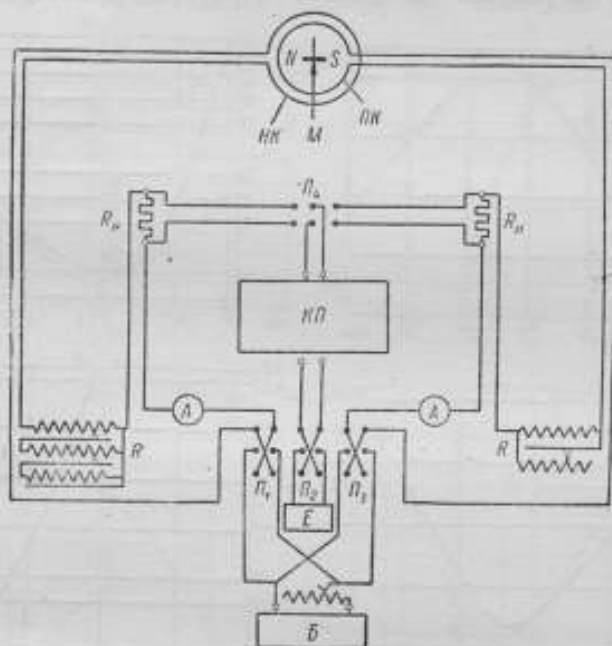


Рис. 10. Схема для определения отношения эквивалентных радиусов катушек магнитоэлектрическим методом

*НК* — неподвижная катушка; *ПК* — подвижная катушка; *М* — магнит магнитометра; *КП* — компарационный прибор; *R<sub>н</sub>* и *R* — образцовые сопротивления; *R* — сопротивления для регулирования силы тока; *K<sub>1</sub>*, *K<sub>2</sub>* и *K<sub>3</sub>* — переключатели направления тока; *K<sub>4</sub>* — переключатель катушек; *Б* — батареи аккумуляторов; *Е* — аккумулятор; *А* — амперметры.

каждая катушка и магнитометр устанавливаются в соответствующих положениях максимумов или минимумов.

Принципиальная электрическая схема для установки катушек и определения отношения их средних радиусов показана на рис. 10.

Измерение токов в катушках для определения отношения радиусов производилось после окончательной установки катушек в одной плоскости и по одной оси.

Так же как и в опытах по установке катушек, измерения абсолютных значений токов не требуется, но для правильного определения их отношения необходимо следить за постоянством рабочего тока компенсатора и за температурой катушек.

С этой целью каждый отдельный цикл включал три измерения падений напряжений: два на зажимах образцового сопротивления, включенного в цепь одной катушки — неподвижной или подвижной, и одно измерение на зажимах образцового сопротивления, включенного в цепь другой катушки, соответственно подвижной или неподвижной. Производя отсчеты последовательно один за другим, можно при таком способе измерений использовать все наблюдения с учетом измерения токового режима.

Число витков в подвижной катушке 86 и в каждой из неподвижных 280.

В табл. 1—5 приводятся результаты наблюдений и обработка результатов этих наблюдений для двух комбинаций катушек — подвижной и каждой из двух неподвижных.

Обозначения в таблицах приняты следующие:

$U_n$  и  $U_n$  — отсчеты по потенциометру, пропорциональные падениям напряжения на образцовых сопротивлениях, включенных соответственно в цепи подвижной и неподвижной катушек;

$I_n$  и  $I_n$  — отсчеты по потенциометру, пропорциональные токам в подвижной и неподвижной катушках;

$t_n$  и  $t_n$  — температуры образцовых сопротивлений;

$\alpha$  — отношение эквивалентных радиусов.

Таблица 1

Подвижная катушка в комбинации с неподвижной нижней катушкой

Сила тока в подвижной катушке, $a$	$U_n$	$t_n$ 301	$U_n$	$t_n$ 388	$\frac{I_n}{I_n}$	$\alpha_n$
1	60000 <sub>9</sub>	20,8°	98310 <sub>8</sub>	21,8°	1,63860 <sub>8</sub>	0,50328 <sub>8</sub>
1	60000 <sub>9</sub>	20,8°	98311 <sub>8</sub>	21,8°	1,63862 <sub>8</sub>	0,50329 <sub>1</sub>
1	60000 <sub>9</sub>	20,8°	98312 <sub>9</sub>	21,8°	1,63862 <sub>9</sub>	0,50329 <sub>2</sub>
1	60000 <sub>9</sub>	20,8°	98312 <sub>8</sub>	21,8°	1,63863 <sub>7</sub>	0,50329 <sub>3</sub>
						$\alpha_{cp} = 0,503291$

Таблица 2

Подвижная катушка в комбинации с неподвижной нижней катушкой

Сила тока в подвижной катушке, $a$	$U_n$	$t_{n\ 901}$	$U_n$	$t_{n\ 388}$	$\frac{I_n}{I_n}$	$\alpha_n$
1	58780 <sub>0</sub>	20,6°	96317 <sub>8</sub>	21,6°	1,63868 <sub>7</sub>	0,50331 <sub>1</sub>
1	58775 <sub>8</sub>	20,6°	96309 <sub>0</sub>	21,6°	1,63866 <sub>1</sub>	0,50330 <sub>0</sub>
1	58772 <sub>0</sub>	20,6°	96300 <sub>7</sub>	21,6°	1,63863 <sub>0</sub>	0,50329 <sub>8</sub>
1	58776 <sub>0</sub>	20,6°	96293 <sub>0</sub>	21,6°	1,63865 <sub>2</sub>	0,50330 <sub>0</sub>
1	58761 <sub>0</sub>	20,6°	96284 <sub>8</sub>	21,6°	1,63866 <sub>5</sub>	0,50330 <sub>4</sub>
1	58755 <sub>0</sub>	20,6°	96276 <sub>0</sub>	21,6°	1,63867 <sub>8</sub>	0,50330 <sub>2</sub>
1	58749 <sub>0</sub>	20,6°	96267 <sub>8</sub>	21,6°	1,63869 <sub>1</sub>	0,50331 <sub>2</sub>
1	58744 <sub>8</sub>	20,6°	96259 <sub>0</sub>	21,6°	1,63868 <sub>2</sub>	0,50331 <sub>0</sub>
						$\alpha_{cp} = 0,50330_3$

Таблица 3

Подвижная катушка в комбинации с неподвижной нижней катушкой

Сила тока в подвижной катушке, $a$	$U_n$	$t_{n\ 901}$	$U_n$	$t_{n\ 388}$	$\frac{I_n}{I_n}$	$\alpha_n$
1	60000 <sub>0</sub>	19,9°	98310 <sub>0</sub>	21,05°	1,63859 <sub>0</sub>	0,50328 <sub>0</sub>
1	60000 <sub>0</sub>	19,9°	98311 <sub>0</sub>	21,05°	1,63861 <sub>0</sub>	0,50329 <sub>0</sub>
1	60000 <sub>0</sub>	19,9°	98312 <sub>0</sub>	21,05°	1,63862 <sub>0</sub>	0,50329 <sub>7</sub>
1	60000 <sub>0</sub>	19,9°	98312 <sub>0</sub>	21,05°	1,63862 <sub>0</sub>	0,50329 <sub>0</sub>
						$\alpha_{cp} = 0,50328_2$

Таблица 4

Подвижная катушка в комбинации с неподвижной верхней катушкой

Сила тока в подвижной катушке, $a$	$U_n$	$t_{n\ 901}$	$U_n$	$t_{n\ 388}$	$\frac{I_n}{I_n}$	$\alpha_n$
1	62555 <sub>0</sub>	19,05°	10278 <sub>0</sub>	20,1°	1,64316 <sub>7</sub>	0,50468 <sub>7</sub>
1	62534 <sub>0</sub>	19,05°	10274 <sub>0</sub>	20,2°	1,64306 <sub>4</sub>	0,50465 <sub>8</sub>
1	62532 <sub>0</sub>	19,1°	10273 <sub>0</sub>	20,25°	1,64304 <sub>7</sub>	0,50464 <sub>0</sub>
1	62527 <sub>0</sub>	19,1°	10273 <sub>2</sub>	20,25°	1,64309 <sub>8</sub>	0,50466 <sub>0</sub>
						$\alpha_{cp} = 0,50466_4$

Подвижная катушка в комбинации с неподвижной верхней катушкой

Сила тока в подвижной катушке, $a$	$U_n$	$t_n$ 301	$U_n$	$t_n$ 388	$\frac{I_n}{I_m}$	$\alpha_n$
1	62361 <sub>а</sub>	19,1°	10246 <sub>б</sub>	20,2°	1,64324 <sub>7</sub>	0,50471 <sub>1</sub>
1	62351 <sub>б</sub>	19,1°	10244 <sub>а</sub>	20,2°	1,64322 <sub>1</sub>	0,50470 <sub>1</sub>
1	62346 <sub>в</sub>	19,1°	10244 <sub>1</sub>	20,2°	1,64322 <sub>5</sub>	0,50470 <sub>5</sub>
1	62343 <sub>г</sub>	19,1°	10243 <sub>7</sub>	20,2°	1,64326 <sub>4</sub>	0,50471 <sub>7</sub>
1	62339 <sub>д</sub>	19,1°	10243 <sub>5</sub>	20,2°	1,64327 <sub>2</sub>	0,50471 <sub>9</sub>
						$\alpha_{cp} = 0,50471_2$

Данные для  $\alpha_n$  и  $\alpha_a$  не включают поправок на конечность сечения катушек и на длину магнита магнитометра. Введение поправок по формулам (68) и (70) дает следующие значения  $\alpha_n$  и  $\alpha_a$ , принятые для расчета постоянной электродинамической системы токовых весов:

$$\alpha_n = 0,503322; \quad \alpha_a = 0,504760.$$

## Глава III

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

## § 1. Расчет постоянной токовых весов

В первой главе приведены выражения для силы взаимодействия  $F$  между двумя параллельными и коаксиальными витками. Силу взаимодействия между катушками конечного сечения с числом витков  $w_1$  и  $w_2$ , когда сила тока в них равна одному амперу, назовем постоянной токовых весов и обозначим через  $f$ .

Как уже было показано,

$$f = F[1 + \Delta],$$

где  $\Delta$  есть поправка на конечные размеры сечения катушки.

Как следует из выражения для величины  $F$ , последнее зависит от двух отношений:

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad z = \frac{x}{r_1},$$

причем непосредственно  $r_2$ ,  $r_1$  и  $x$  измерить в реальной конструкции невозможно, так как они являются для данных катушек некоторыми средними величинами.

Вследствие этого расчету постоянной  $f$  должно предшествовать опытное определение  $a$ , о чем было кратко изложено в предыдущей главе. Отношение  $\frac{x}{r_1}$  не определяется, но катушки опытным путем устанавливаются коаксиально и параллельно на таком расстоянии между центрами, при котором сила  $F$  достигает максимального значения. Для этого случая, как показывает теория,

$$\frac{x}{r_1} = 0,5 - 0,45a^2 - 0,0625a^4,$$

если  $a$  лежит в пределах  $0,5 < a < 0,75$ .

В табл. 6 приводятся вычисления  $F$  и  $\Delta$ . Для того чтобы не происходило накопления ошибок в процессе арифметических действий (главным образом при вычитании близких величин), все вычисления ведутся с точностью до шестого десятичного знака, который отбрасывается в конечном результате.

Таблица 6

Результаты вычислений  $F$  и  $\Delta$

Обозначения вычисляемых величин	Подвижная и верхняя неподвижная катушки	Подвижная и нижняя неподвижная катушки
$a$	0,504760	0,503322
$y$	0,381291	0,381989
$k^2$	0,837885	0,836815
$K$	2,353225	2,350197
$E$	1,152177	1,152941
$F = \frac{\partial M}{\partial x}$	5,48320	5,44330
$b_1$	10,50	10,50
$b_2$	5,00	5,00
$c_1$	10,58	11,01
$c_2$	5,48	5,48
$\Delta$	- 0,00233	- 0,00196
$F(1 + \Delta)$	5,47042	5,43263

При числе витков в каждой из неподвижных катушек, равном 280, и в подвижной, равном 86, постоянная электродинамической системы  $f = 86 \times 280 \times 10,90305 = 2625,495 \text{ дин}/a^2$ .

## § 2. Установка катушек в токовых весах

Основному опыту по определению силы тока должна предшествовать установка, при которой будет обеспечена их коаксиальность, параллельность и определенное расстояние между центрами, соответствующее максимуму взаимодействия. С этой целью неподвижная катушка перемещается по отношению

к подвижной как в горизонтальной плоскости (по двум взаимно перпендикулярным направлениям), так и по вертикальному направлению.

Так как неподвижные катушки собраны в одном блоке, допускающем перемещение только вдоль их общей оси, то горизонтальная установка производится одновременным перемещением двух катушек, а вертикальная — для каждой неподвижной катушки отдельно.

При перемещении по вертикали определялось положение катушки, при котором сила взаимодействия достигает максимума, а при перемещении по горизонтали определялось положение, при котором сила взаимодействия достигнет минимума. Найденное по трем координатам положение неподвижной катушки соответствует требуемому условию коаксиальности, а расстояния между центрами неподвижной и подвижной удовлетворяют условию:

$$\frac{x}{r_1} = 0,5 - 0,45a^2 - 0,0625a^4.$$

Результаты опытных данных приведены на графиках (рис. 11), в которых точки максимумов и минимумов соответствуют центральному положению подвижной катушки.

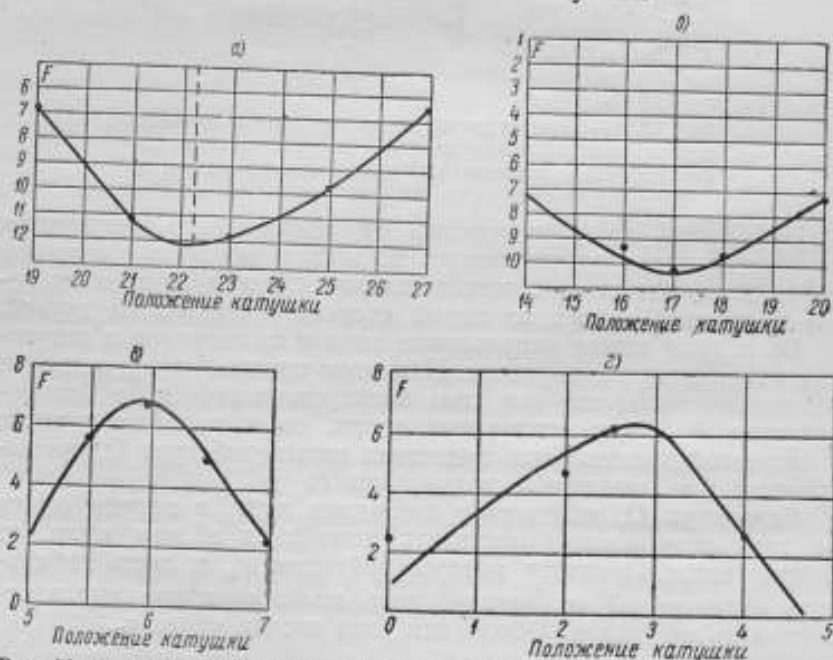


Рис. 11. Графики юстировки катушек в установке токовых весов: а — горизонтальная юстировка нижней катушки в направлении  $WO$ ; б — то же, в направлении  $NS$ ; в — вертикальная юстировка нижней катушки; г — то же, верхней катушки

### § 3. Измерения силы тока

Значение силы тока в абсолютных амперах определяется путем уравновешивания на весах силы электродинамического взаимодействия между подвешенным к коромыслу весов подвижным соленоидом и неподвижным соленоидом.

Процесс уравновешивания состоит из двух следующих друг за другом опытов.

В первом опыте уравновешивание весов производится при таком направлении тока, когда электродинамическая сила  $F$  действует на подвижную катушку вниз. В этом случае уравновешивающий груз  $P$  помещается на чашку весов, находящуюся на противоположном плече коромысла (рис. 12). Так как при разных тепловых условиях груз  $P$  может потребоваться разным, то добавочный момент создается рейтером  $P_p$ , показанным в некотором произвольном положении на чертеже.

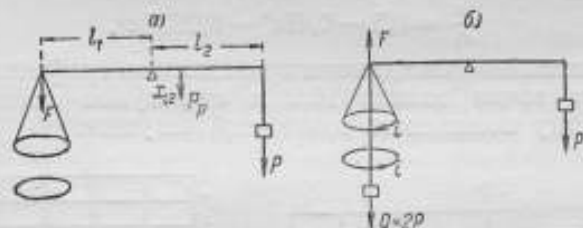


Рис. 12. *а* — весовая схема уравновешивания взаимно притягивающихся катушек; *б* — весовая схема уравновешивания взаимно отталкивающихся катушек

Небольшая доля отклонения от равновесного положения коромысла весов отсчитывается по шкале, которую обозначим через  $\pm \alpha_1$ , причем  $\alpha_1$  вычисляется как среднее из трех отсчетов колебаний — двух на одной стороне и одного на другой.

Во втором опыте направление тока в неподвижных катушках изменяется на обратное. При этом грузы  $P$  и  $P_p$  остаются неизменными, но так как сила электродинамического взаимодействия  $F$  будет направлена вверх, то к коромыслу весов с катушкой должен быть подвешен некоторый груз  $Q$ , превышающий приблизительно вдвое груз  $P$ .

Если груз  $Q$ , вследствие смещения нуля, в первом опыте не дает возможности отсчитать колебания вблизи нуля, то можно воспользоваться вторым рейтером  $P_Q$  и лишь небольшое отклонение\* от равновесного положения коромысла отсчитывать по шкале. Обозначим этот отсчет через  $\alpha_2$ .

\* Отклонение катушки от центрального положения должно быть по возможности малым, так как сила электродинамического взаимодействия изменяется, чем нарушается линейный характер колебаний.



Для учета смещения нулевого положения весов первый опыт проводился два раза до уравнивания с грузом  $Q$  и после уравнивания с грузом  $Q$ . Таким образом,  $\alpha_1$  есть среднее из двух опытов.

В первом опыте уравнение равновесия моментов относительно центра колебаний имеет следующий вид:

$$f^2 l_1 - P l_2 \mp P_p x_{1,2} - \varepsilon \alpha_1 l_1 = 0, \quad (74)$$

где  $f$  — постоянная электродинамического взаимодействия катушек;

$I$  — сила тока, протекающего по катушкам;

$l_1$  и  $l_2$  — расстояния от центра колебаний до точки подвеса катушки и точки подвеса груза  $P$ ;

$\varepsilon$  — цена деления шкалы весов;

$x_{1,2}$  — расстояние от центра колебания до рейтера.

Во втором опыте добавляется со стороны, противоположной грузу  $P$ , груз  $Q$ , и в случае необходимости добавляется рейтер на той или иной стороне коромысла. Уравнение равновесия моментов в этом случае имеет вид

$$F f^2 l_1 + P l_2 \pm P_p x_{1,2} - \varepsilon \alpha_2 l_1 - Q l_1 \mp P_Q x_{1,2} = 0.$$

Складывая два уравнения, имеем:

$$2f^2 = Q + P_Q \frac{x_{1,2}}{l_1} + (\alpha_1 - \alpha_2) \varepsilon.$$

Как видно в окончательном выражении для величины  $F$ , грузы  $P$  и  $P_p$  в него не входят. Таким образом такая методика исключает влияние неравноплечности коромысла. Цена деления шкалы весов  $\varepsilon$  определяется из наблюдений. Так, если груз  $P$  вызывает отклонение световой полосы по шкале на  $a$  делений, то

$$\varepsilon = \frac{P}{a}.$$

В проводившихся опытах  $Q$ ,  $P_Q$  и  $\varepsilon$  имели следующие значения:

$$Q = 5,5481 \text{ г}; P_Q = 10,05 \text{ мг} \text{ и } \varepsilon = 0,09 \text{ мг/дел.}$$

Отсчеты по шкале производились с точностью до 0,5 деления и хотя в табличных данных они даются в результате арифметических действий с точностью до 0,1 деления, однако в дальнейшем величина уравнивающей силы округлялась до 0,05 мг.

Одновременно с уравниванием производилось измерение силы тока посредством нормального элемента и образцового сопротивления. Такое измерение, или, вернее, поддер-

жание вполне определенного тока, исключает ошибки, которые может внести компенсатор, и требует лишь поддержания постоянства токового режима, что осуществлялось регулировкой сопротивлений в цепи тока. Электрическая схема токовых весов показана на рис. 13.

Обозначая через  $E_n$  э. д. с. нормального элемента, а через  $R_n$  сопротивление образцової катушки, получим выражение для  $I$ :

$$I = \frac{E_n}{R_n}.$$

Если значения  $E_n$  и  $R_n$  даны в международных единицах, то по результату уравновешивающей силы и силы тока в абсолютных единицах находим отношение единицы международной ампера к единице абсолютного ампера.

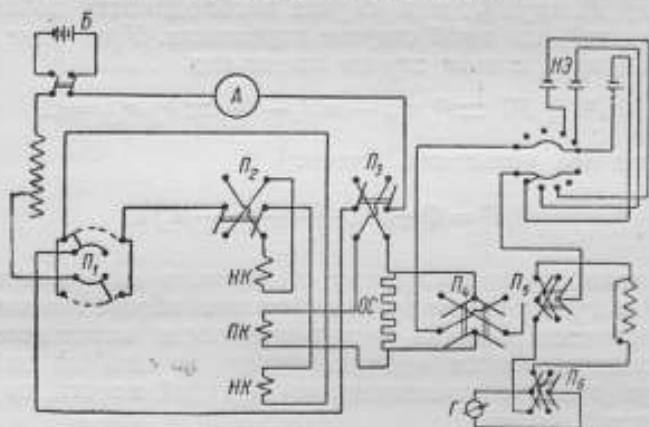


Рис. 13. Электрическая схема токовых весов с многослойными катушками

НК — неподвижные катушки; ПК — подвижная катушка; НЭ — нормальный элемент; Г — гальванометр; П<sub>1</sub>, П<sub>2</sub>, П<sub>3</sub>, П<sub>4</sub>, П<sub>5</sub>, П<sub>6</sub> — переключатели; А — вольтметр; Б — аккумуляторная батарея

При опытах применялся нормальный элемент № 5709, который перед тем сличался с групповым эталоном э. д. с.

Значение э. д. с. в международных вольтах вычисляется по формуле:

$$E_n = \frac{1,01825_0}{1,000275} - 406 \cdot 10^{-7} (t - 20) - 95 \cdot 10^{-8} (t - 20)^2.$$

Сопротивление применявшейся образцової катушки Л-4 в международных омах вычисляется по формуле:

$$R_n = 1,00004 + 0,0000150 (t - 20) - 0,00000054 (t - 20)^2. \quad (75)$$

Сила тока в абсолютных амперах вычислялась по формуле:

$$I_{abc} = \sqrt{\frac{Q_{np} \cdot g \cdot 100}{2 \cdot 86 \cdot 280 [f_1 + f_2]}} \quad (76)$$

где  $Q_{np} = Q \pm P_Q$ , а  $86 \cdot 280$  — произведение числа витков катушек.

После подстановки численных значений  $g$ ,  $f_1$  и  $f_2$  формула (76) примет вид

$$I_{abc} = \sqrt{0,187062 Q_{np}}$$

В табл. 7 приводятся вычисленные значения силы тока в абсолютных амперах  $I_{abc}$ , измеренные значения силы тока в международных амперах  $I_M$  и отношение единицы  $I_M$  к единице  $I_{abc}$ .

Таблица 7

Результаты определения отношения единицы  $I_M$  к единице  $I_{abc}$

$Q_{np}$	$I_{abc}$	Э. л. с. нормального элемента в международных вольтгах	Температура нормального элемента в °C	Сопротивление образцовой катушки в международных омах	Температура образцового сопротивления в °C	$I_M$	ед. $I_M$ ед. $I_{abc}$
5,54255	1,01807 <sub>1</sub>	1,01819	23,0	1,00008 <sub>2</sub>	23,0	1,01810 <sub>5</sub>	0,99996 <sub>5</sub>
5,54240	1,01805 <sub>7</sub>	1,01819	23,0	1,00008 <sub>2</sub>	23,0	1,01810 <sub>5</sub>	0,99995 <sub>5</sub>
5,54270	1,01808 <sub>4</sub>	1,01819	23,0	1,00008 <sub>2</sub>	23,0	1,01810 <sub>5</sub>	0,99998 <sub>5</sub>
5,54245	1,01806 <sub>1</sub>	1,01819	23,0	1,00008 <sub>2</sub>	23,0	1,01810 <sub>5</sub>	0,99996 <sub>5</sub>
5,54240	1,01805 <sub>7</sub>	1,01822	22,2	1,00008 <sub>2</sub>	23,4	1,01813 <sub>0</sub>	0,99993 <sub>0</sub>
5,54215	1,01803 <sub>4</sub>	1,01822	22,2	1,00008 <sub>2</sub>	23,4	1,01813 <sub>0</sub>	0,99990 <sub>2</sub>
5,54245	1,01806 <sub>1</sub>	1,01822	22,2	1,00008 <sub>2</sub>	23,4	1,01813 <sub>0</sub>	0,99993 <sub>0</sub>
5,54215	1,01803 <sub>4</sub>	1,01822	22,2	1,00008 <sub>2</sub>	23,4	1,01813 <sub>0</sub>	0,99990 <sub>2</sub>
5,54255	1,01807 <sub>1</sub>	1,01822	22,2	1,00008 <sub>2</sub>	23,4	1,01813 <sub>0</sub>	0,99994 <sub>0</sub>
5,54250	1,01806 <sub>1</sub>	1,01825	21,5	1,00007 <sub>2</sub>	22,2	1,01817 <sub>0</sub>	0,99989 <sub>0</sub>
5,54230	1,01804 <sub>8</sub>	1,01825	21,5	1,00007 <sub>2</sub>	22,2	1,01817 <sub>0</sub>	0,99987 <sub>0</sub>
5,54245	1,01803 <sub>4</sub>	1,01825	21,5	1,00007 <sub>2</sub>	22,2	1,01817 <sub>0</sub>	0,99989 <sub>0</sub>
5,54215	1,01803 <sub>4</sub>	1,01825	21,5	1,00007 <sub>2</sub>	22,2	1,01817 <sub>0</sub>	0,99986 <sub>0</sub>
5,54265	1,01808 <sub>0</sub>	1,01823 <sub>3</sub>	21,8	1,00008 <sub>2</sub>	23,0	1,01815 <sub>0</sub>	0,99993 <sub>0</sub>
5,54265	1,01808 <sub>0</sub>	1,01823 <sub>3</sub>	21,8	1,00008 <sub>2</sub>	23,0	1,01815 <sub>0</sub>	0,99993 <sub>0</sub>
5,54240	1,01805 <sub>7</sub>	1,01823	22,0	1,00008 <sub>2</sub>	23,3	1,01814 <sub>2</sub>	0,99991 <sub>2</sub>
5,54235	1,01805 <sub>7</sub>	1,01823	22,0	1,00008 <sub>2</sub>	23,3	1,01814 <sub>2</sub>	0,99991 <sub>2</sub>
5,54220	1,01803 <sub>4</sub>	1,01823	22,0	1,00008 <sub>2</sub>	23,3	1,01814 <sub>2</sub>	0,99990 <sub>2</sub>
5,54240	1,01805 <sub>7</sub>	1,01825 <sub>4</sub>	21,4	1,00007 <sub>2</sub>	22,6	1,01817 <sub>0</sub>	0,99988 <sub>0</sub>
5,54240	1,01805 <sub>7</sub>	1,01825 <sub>4</sub>	21,4	1,00007 <sub>2</sub>	22,6	1,01817 <sub>0</sub>	0,99988 <sub>0</sub>
5,54240	1,01805 <sub>7</sub>	1,01825 <sub>4</sub>	21,4	1,00007 <sub>2</sub>	22,6	1,01817 <sub>0</sub>	0,99988 <sub>0</sub>
5,54250	1,01806 <sub>1</sub>	1,01825 <sub>4</sub>	21,4	1,00007 <sub>2</sub>	22,6	1,01817 <sub>0</sub>	0,99989 <sub>0</sub>
5,54270	1,01808 <sub>4</sub>	1,01825	21,5	1,00007 <sub>2</sub>	22,3	1,01817 <sub>0</sub>	0,99991 <sub>0</sub>
Среднее							0,99991 <sub>2</sub>

Примечание. Вероятная погрешность результата  $\left(\frac{I_{abc}}{I_M}\right) = 5 \cdot 10^{-6}$ .

§ 4. Погрешности в определении постоянной токовых весов и в экспериментальном определении силы взаимодействия между катушками

Погрешности, которые имеют место в процессе абсолютных измерений силы тока, могут быть разделены на систематические и случайные.

Разделение их не всегда может быть сделано вполне строго. Так, например, погрешность в значении постоянной токовых весов  $f$ , неизменная при определении абсолютного значения силы тока, вычисляется по данным размеров, определяемых с некоторыми случайными погрешностями, и не может быть исключена. В дальнейшем погрешность в расчете  $f$  будет приниматься за случайную погрешность в значении силы электродинамического взаимодействия, определяемой опытным путем.

Ниже приводятся расчеты по оценке указанных погрешностей.

Относительная погрешность  $\frac{\delta f}{f}$  вычисляется по формуле:

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\beta}{2y^2} \frac{\delta \alpha_0}{\alpha_0} + \frac{b_1^2}{2y^2 r_1^2} \left[ \beta - \frac{\lambda_2 (1 + \beta)}{3} \right] \frac{\delta b_1}{b_1} - \frac{b_2}{2y^2 r_2^2} \left[ \beta + \frac{\lambda_2 (1 - \beta)}{3} \right] \frac{\delta b_2}{b_2} + \frac{c_1^2}{3} \left[ \gamma_0 - \frac{\lambda_2}{y^2} \gamma_{11} - \frac{\beta}{y^2 r_1^2} \right] \frac{\delta c_1}{c_1} + \frac{c_2^2}{2} \left[ \gamma_0 - \frac{\lambda_2 \gamma_{11}}{y^2} - \frac{\beta}{y^2 r_2^2} \right] \frac{\delta c_2}{c_2}. \quad (77)$$

Вывод этой формулы дан выше.

Приведенная формула дает самое общее выражение погрешности определения  $\frac{\delta f}{f}$ , включая и часть, вносимую погрешностью определения отношения эквивалентных радиусов  $\alpha_0$ .

Однако основная погрешность, вносимая значением  $\alpha$  в формуле (77), разделена так, что  $\frac{\delta \alpha_0}{\alpha_0}$  дает погрешность только компенсационных измерений токов при определении отношения  $\alpha$ , так как

$$\alpha_0 = \frac{w_2 I_2}{w_1 I_1}.$$

Подсчет  $\frac{\delta f}{f}$  произведен для отдельных слагаемых, каждое из которых характеризует влияние неточности определения той или иной величины на общую погрешность.

Максимальная вероятная погрешность результата в измерении радиальных сторон сечения не превышает 0,02 мм.

Эту величину и следует взять для  $\delta c$ , и в дальнейшем положим

$$\delta c_1 = \delta c_2 = 0,02 \text{ мм.}$$

Для аксиальных размеров вероятная погрешность в определении  $\delta b_1$  и  $\delta b_2$  не может быть получена из измерений, так как в этом направлении определение среднего размера невозможно. В этом случае нужно основываться на допуске на ширину ленты, изготовленной на заводе, составляющем не более 0,01 мм. Очевидно, что такую величину следует принять за абсолютное значение погрешности значения  $\delta b$ , и в дальнейшем положим

$$\delta b_1 = \delta b_2 = 0,01 \text{ мм.}$$

Значения  $\delta c_i$  и  $\delta b_i$  позволяют определить численные значения частных погрешностей, которые для подвижной катушки равны:

$$\frac{b_2^2}{2y^2r_2^2} \left[ \beta + \frac{\lambda_2(1-\beta)}{3} \right] \frac{\delta b_2}{b_2} = 0,0108 \cdot \frac{0,01}{5} = 0,00002;$$

$$\frac{c_2^2}{3} \left[ \gamma_0 - \frac{\lambda_2}{y^2} \gamma_{11} - \frac{\beta}{y^2r_2^2} \right] \frac{\delta c_2}{c_2} = 1,827 \cdot 0,0011 \cdot 0,02 = 0,00004,$$

а для неподвижной катушки:

$$\frac{b_1^2}{2y^2r_1^2} \left[ \beta - \frac{\lambda_2(1+\beta)}{3} \right] \frac{\delta b_1}{b_1} = 0,0037 \cdot \frac{0,01}{10} = 0,000004,$$

$$\frac{c_1^2}{3} \left[ \gamma_0 - \frac{\lambda_2\gamma_{11}}{y^2} - \frac{\beta}{y^2r_1^2} \right] \frac{\delta c_1}{c_1} = 0,000001.$$

Как видно из приведенных расчетов, наибольшую погрешность для значения  $f$  вносит погрешность определения размеров сечения подвижной катушки.

Выше указывалось, что  $\frac{\delta_{\alpha_2} f}{f}$  определяется погрешностью компенсационных измерений тока при определении отношения эквивалентных радиусов. Эту погрешность можно считать величиной порядка 0,002%, и, следовательно,

$$\frac{\delta_{\alpha_2} f}{f} = \frac{\beta}{2y^2} \frac{\delta \alpha_0}{\alpha_0} = 2,5 \cdot 2 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Для самого неблагоприятного случая, когда все погрешности будут влиять на значение  $f$  в одном каком-нибудь

направлении, получим, что погрешность этого значения составляет величину порядка  $0,01\%$ , и следовательно, определение значения силы тока производится с погрешностью порядка  $0,005\%$ .

Сказанным исчерпывается вопрос о погрешностях определения постоянной токовых весов, которые не могут быть учтены без более точного определения размеров сечения обмоток и которые при установлении значения единицы силы тока будут играть роль систематической погрешности.

Случайные погрешности экспериментального определения силы тока по механическому взаимодействию катушек приведены в табл. 6. Из нее следует, что вероятная погрешность результата составляет  $5 \cdot 10^{-6}$  измеряемой величины.

## Глава I

УСТРОЙСТВО ТОКОВЫХ ВЕСОВ С ОДНОСЛОЙНЫМИ КАТУШКАМИ  
И ИХ ТЕОРИЯ

## § 1. Устройство токовых весов

Токовые весы с однослойными катушками или соленоидами, схематическое устройство которых показано на рис. 14, представляют собой установку, основными частями которой являются рычажные весы и электродинамическая система катушек. Помимо этого в установку входят оптическая система, органы управления, система охлаждения и источники питания.

1. Рычажные весы не имеют значительной разницы с обычными лабораторными равноплечными весами грузоподъемностью до трех килограммов. Однако в результате тщательного изготовления главнейших деталей и хорошей сборки весы приобрели качества, характеризующиеся повышенной устойчивостью и требуемой чувствительностью. Основные размеры весов следующие: длина коромысла 34 см, высота колонки 22 см. Весы смонтированы на мраморной панели с тремя установочными винтами, при помощи которых они выверяются по уровням в горизонтальной плоскости.

Опорная и грузоподъемные призмы и соответствующие им опорные подушки изготовлены из агата. На коромысле с передней его стороны укреплен рейтерная шкала, разделенная на 100 делений. К серьгам коромысла подвешены удлиненные стержни, к нижним концам которых прикрепляются подвижные соленоиды. Все без исключения детали весов и относящиеся к ним вспомогательные и дополнительные узлы изготовлены из немагнитных материалов. Весы в укомплектованном и собранном виде смонтированы в специальной (двухотсековой) остекленной витрине. Общий вид весов показан на рис. 15.

2. Электродинамическая система состоит из двух подвижных и одного неподвижного соленоидов и спе-

циальных „безмоментных“ токовых подводок. Соленоиды предназначены для получения электродинамического взаимодействия, которое и определяется при помощи токовых весов. Токовые подводки служат для питания обмоток подвижных соленоидов.

Неподвижный соленоид, или кратко *НС* (рис. 14), назван так потому, что в процессе взвешивания на весах находится в неподвижном состоянии. Этот соленоид представляет собой

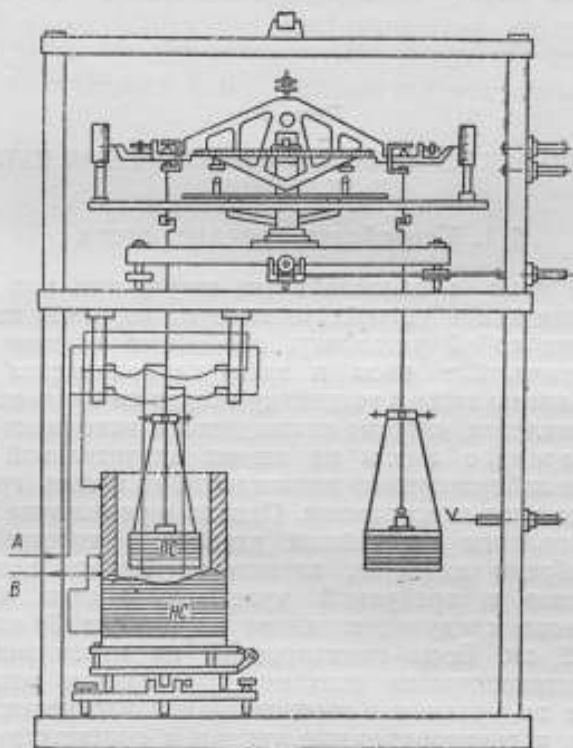


Рис. 14. Схематическое устройство токовых весов с соленоидальной электродинамической системой

полый цилиндр, на наружной поверхности которого спирально навита однослойная обмотка из медной проволоки. Каркас неподвижного соленоида, имеющий длину около 500 мм, диаметр около 270 мм и толщину стенок до 20 мм, изготовлен из специального стекла „пирекс“. Этот материал характеризуется весьма малым коэффициентом температурного расширения, хорошими изоляционными свойствами и ничтожной магнитной восприимчивостью.



На наружной тщательно обработанной поверхности каркаса нарезана винтовая канавка с шагом в 1 мм, в которую, под определенным постоянным натяжением заложена обмотка. Обмотка состоит из 450 витков голой, калиброванной медной проволоки диаметром 0,8 мм. Отступя от концов обмотки, к определенным виткам припаяны „отводы“, в промежутке

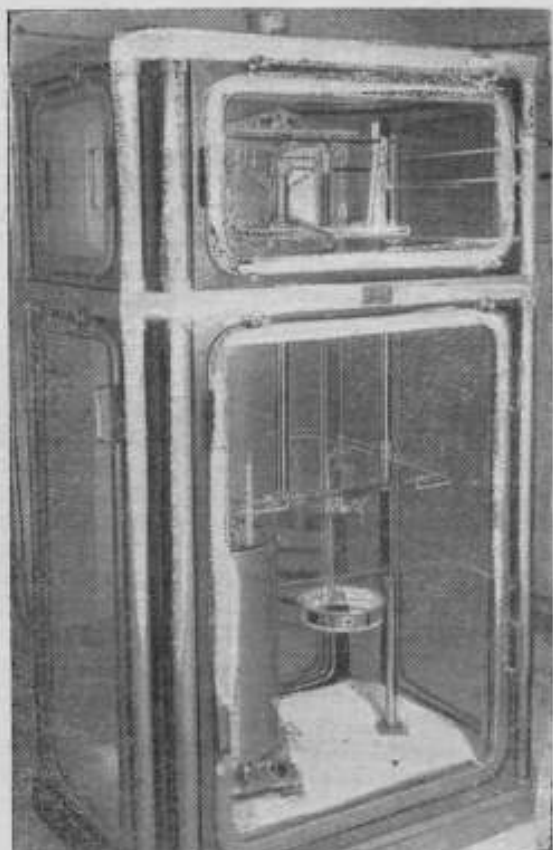


Рис. 15. Общий вид токовых весов в специальной остекленной витрине

между которыми заключено 400 витков. Кроме этих двух крайних отводов, имеются еще два средние отвода, так что между ними и каждым крайним отводом размещено по 200 витков.

Для подвода средних проводов центральный виток разрезан, и концы его спаяны с подводящим проводом *B* и вторым, соединяющим верхнюю половину соленоидов (рис. 14). Рас-

стояние между концами разрезанного провода не превышает 0,2 мм. Закрепление этих отводов осуществлено с помощью двух специальных колодок, изготовленных из кости и стягиваемых двумя винтами. Места припайки всех отводов расположены на одной прямой, совпадающей с образующей цилиндра. Указанные отводы предназначены для включения обмотки соленоида в электрическую схему.

Принципиальная электрическая схема обмотки неподвижного соленоида видна на общей схеме рис. 20.

Неподвижный соленоид установлен на подставке с регулировочным устройством, которое позволяет производить независимо друг от друга нивелировку соленоида по уровню и плавное перемещение его в трех взаимно перпендикулярных направлениях: в горизонтальной плоскости, параллельной плоскости коромысла весов, в плоскости, перпендикулярной плоскости коромысла, и в вертикальном направлении.

Все указанные перемещения можно измерять с точностью до 0,01 мм при помощи микрометрических винтов с нониусами.

Неподвижный соленоид, вместе с регулировочным устройством, установлен в нижней части остекленной витрины на мраморной плите.

Подвижные соленоиды *ПС*, общий вид которых показан на рис. 16, представляют систему из двух однослойных соленоидов, связанных концентрично при помощи центрирующих фланцев, в которых имеются концентрические выточки соответственно внутренним диаметрам каркасов. Диаметр одного из них 215 мм и другого 187 мм, высота их равна 45,5 мм. Оба соленоиды намотаны голым проводом на фарфоровых полых цилиндрах, толщина стенок которых около 8 мм. Шаг винтовой нарезки, по которой намотана проволока, равен 0,8 мм. Число витков каждого соленоида 58. Диаметр намотанной проволоки равен 0,6 мм. Обмотки обоих соленоидов соединены последовательно.

Подвижный соленоид оснащен специальной арматурой, при помощи которой он скрепляется с серьгой и подвешивается к коромыслу весов. На арматуре установлен круговой уровень, служащий для нивелирования подвижного соленоида в горизонтальной плоскости.

Общий вид расположения подвижного и неподвижного соленоидов, установленных в нижней части остекленной витрины, показан на рис. 17.

Описанные соленоиды являются главными элементами токовых весов.

Токовые подводки предназначены для питания током обмоток действующих неподвижных соленоидов и являются частью общей схемы питания соленоидов.

К токовым подводкам предъявляются требования, которые в некоторой степени противоречат друг другу. С одной сто-

роны, подводки должны быть практически „безмоментными“, т. е. быть весьма тонкими и гибкими, чтобы не оказывать существенного влияния на колебания весов и мало снижать их чувствительность. С другой стороны, токовые подводки

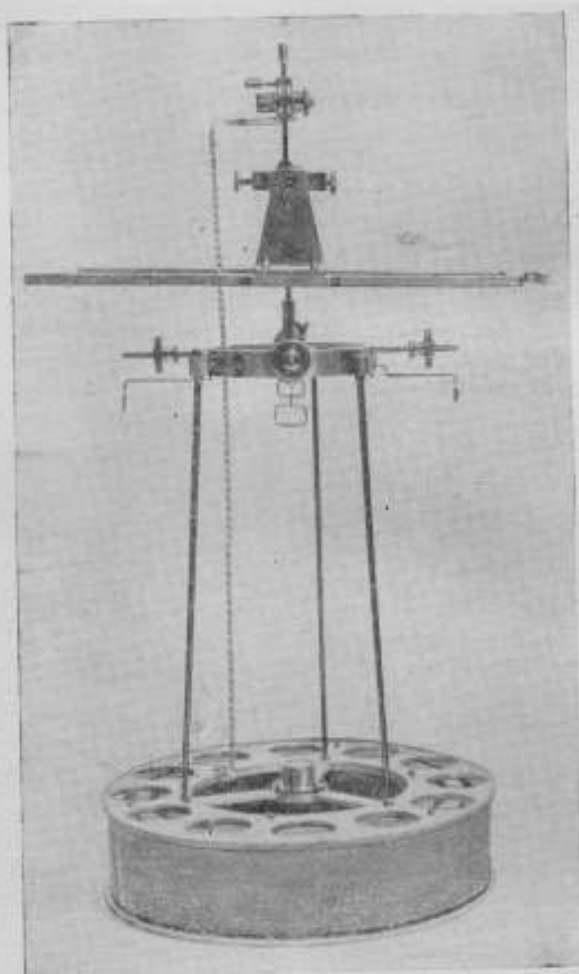


Рис. 16. Общий вид подвижных соленоидов

должны обладать достаточной проводимостью, т. е. быть не очень тонкими и длинными, чтобы при прохождении через них тока силой в один ампер не могло выделяться значительного количества тепла, вредно влияющего на тепловой режим весов и вызывающего неравноплечность их коромысла. Кроме

того, эти подводки не должны образовывать контуров, которые могли бы создавать магнитные поля, искажающие результаты опытов взвешивания.

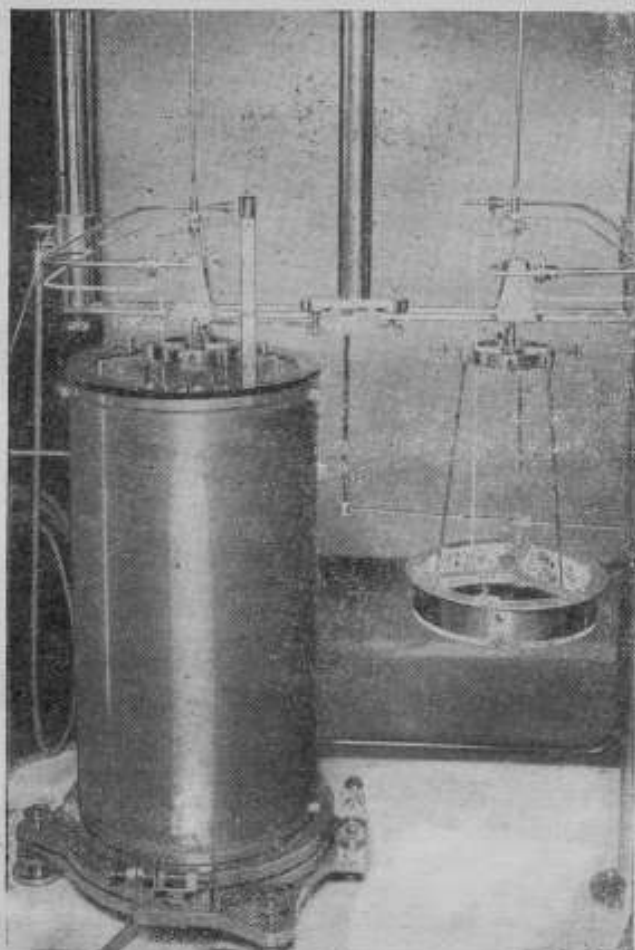


Рис. 17. Общий вид электродинамической системы токовых весов

В настоящем случае задача разрешена удалением токовых подводок от коромысла весов и размещением их в нижнем отсеке витрины, который изолирован от верхнего весового отсека. Монтаж их выполнен по схеме двух параллельных шлейфов, вследствие чего образование искажающих магнитных полей сведено к минимуму.

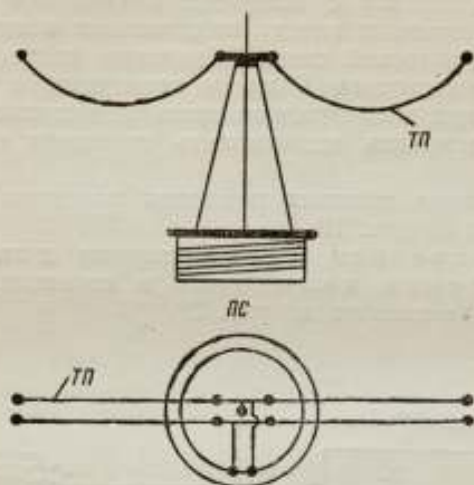


Рис. 18. Схема присоединения токовых подводок к подвижному соленоиду

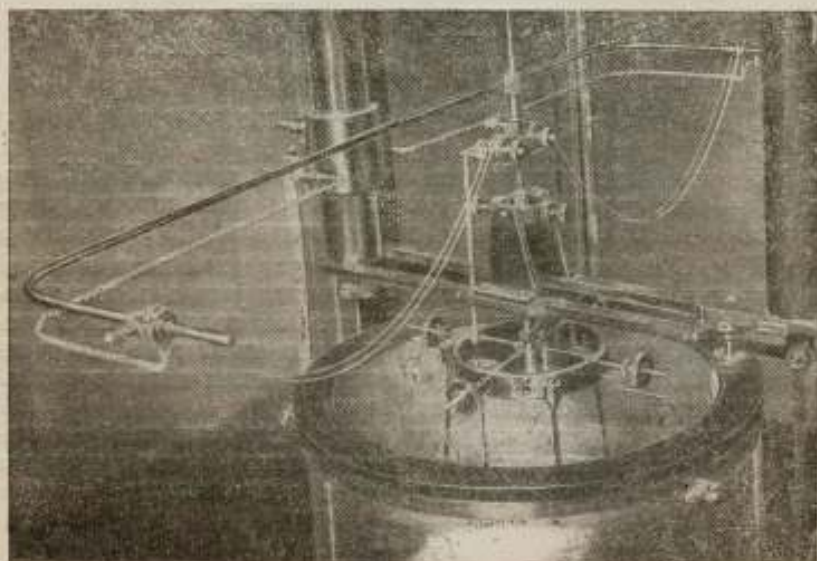


Рис. 19. Общий вид системы подвода тока к подвижному соленоиду

Токовые подводы осуществлены из серебряных ленточек длиной около 300 мм с поперечным сечением  $1 \times 0,03$  мм, свободно подвешенных между подвижными и неподвижными деталями электрической схемы. Ленточки расположены друг от друга на расстоянии 6 мм и подведены к подвижному соленоиду с двух диаметрально противоположных сторон для того, чтобы исключить возможность смещения его от вертикали.

Схема монтажа токовых подводов показана на рис. 18, а внешний вид на рис. 19.

3. Электрическая схема служит для питания и для измерения силы тока в соленоидах. Принципиальный вид ее показан на рис. 20.

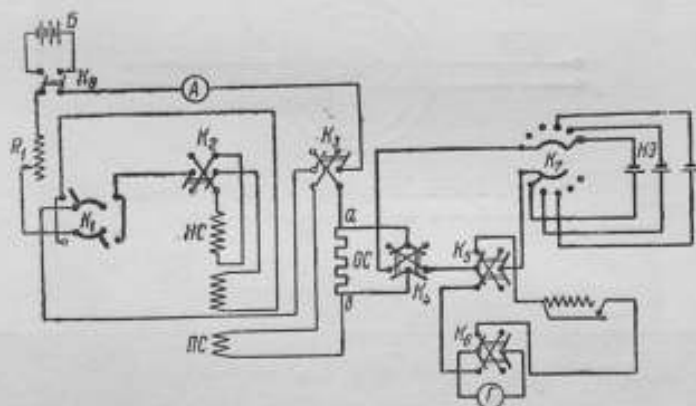


Рис. 20. Электрическая схема токовых весов

Оба соленоида, подвижный ПС и неподвижный НС, соединенные последовательно, включаются в цепь аккумуляторной батареи *B* при помощи переключателя *K*<sub>1</sub>. Переключатели *K*<sub>1</sub> и *K*<sub>2</sub> служат для изменения направления тока в одной из катушек неподвижного НС соленоида или в обеих одновременно, *K*<sub>3</sub> — в обмотке подвижного ПС соленоида. Сопротивление *R*<sub>1</sub> служит для регулирования силы тока, а сопротивление *OC* (образцовое) — для подключения цепи нормального элемента НЭ с гальванометром *Г*.

Регулируя силу тока в цепи соленоидов так, чтобы гальванометр *Г* не давал отклонения, очевидно, будем иметь для силы тока *I* в соленоидах следующее соотношение:

$$I = \frac{E_n}{R_0}$$

Вычислив силу тока *I*<sub>обс</sub> по соответствующей формуле, мы можем найти либо электродвижущую силу нормального

элемента в абсолютных единицах, если известно сопротивление  $R_0$ , или же отношение силы тока, выраженной в абсолютных единицах к силе тока, выраженной в международных, если известно  $E_n$  и  $R_0$  в международных единицах.

После окончания монтажа схема подвергалась специальным исследованиям. Было определено влияние остаточных магнитных полей на результаты взвешивания и найдены соответствующие поправки. Измерено сопротивление изоляции схем как по отдельным участкам, так и в целом; измерение показало, что оно нигде не ниже  $10^8 \text{ ом}$ .

4. Оптическая система. Для наблюдения за колебаниями коромысла весов установлена оптическая система (рис. 21).

Вследствие того, что расстояние между зеркальцем весов и шкалой велико (более 4 м), система значительно повышает точность измерения колебаний коромысла, доводя погрешность до сотых долей миллиметра.

5. Органы управления. Веса, электродинамическая система и все относящиеся к весам дополнительные механизмы установлены и смонтированы, как уже было сказано выше, в специальной стеклянной витрине. Для того чтобы в процессе опытов не нарушать теплового режима токовых весов и тем самым не исказить полученные результаты, витрина установлена в отдельной изолированной комнате. Поэтому управление весами производится из смежной комнаты, куда выведены все необходимые органы управления.

В процессе выполнения экспериментальных работ на токовых весах, необходимо производить следующие операции: а) пускать и останавливать веса (арретировать), б) нагружать и разгружать веса, т. е. класть и снимать гирьку, в) перемещать дополнительную гирьку (рейтер) вдоль рейтерной шкалы коромысла, г) опускать на рейтерную шкалу и поднимать с нее рейтер (посадчик рейтера).

Для осуществления всех этих операций, внутри витрины и с внешней ее стороны смонтированы особые механизмы, приводимые в действие трубчатыми штангами, выведенными через стенку в смежную комнату.

6. Система охлаждения. При прохождении тока через обмотки соленоидов, в них выделяется тепло, подогревающее и каркасы и окружающий воздух. Расширение

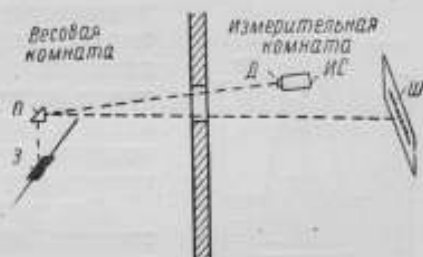


Рис. 21. Схема оптической системы  
З — зеркало коромысла весов; П — отражающая призма; ИС — источник света; Д — диафрагма; Ш — шкала

обмоток и каркасов соленоидов, обусловливаемое повышением температуры, может быть учтено введением соответствующих поправок, расширение же воздуха внутри неподвижного соленоида и вокруг подвижного вызывает неправильные колебания весов, которые не поддаются учету, вследствие чего наблюдения оказываются неправильными. Нагревание воздуха вызывает или резкие затухания колебаний, или раскачивания весов, которые не дают возможности получить правильные отсчеты.

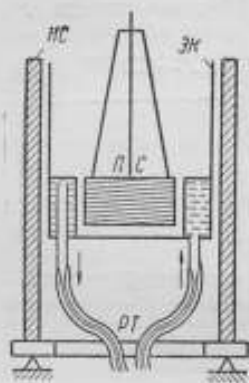


Рис. 22. Водоохлаждающая система  
 НС — неподвижный соленоид; ПС — подвижный соленоид; ЭК — металлический экран; РТ — решетки для пропуска воды

Для устранения этого недостатка была введена водоохлаждающая система. Конструкция этой системы в принципиальном виде показана на рис. 22.

7. Источники питания. Основным источником питания обмоток соленоидов служит аккумуляторная батарея напряжением 24 в, составленная из нескольких параллельно соединенных групп, которые в совокупности дают общую емкость свыше 400 ач.

Батарея вынесена в отдельное помещение, не связанное с весовой и измерительной комнатами.

## § 2. Взаимодействие между двумя однослойными катушками

Однослойные катушки представляют собой цилиндр, на который намотан провод по винтовой линии с шагом, определяемым диаметром провода и расстоянием между витками. Взаимодействие между такими катушками с достаточной степенью приближения можно отождествить с взаимодействием между двумя катушками, в которых провод заменен бесконечно тонкой лентой шириной, равной шагу намотки, или же со взаимодействием двух винтовых линий, соответствующих центральной линии провода.\*

Такое отождествление необходимо сделать ввиду возможности непосредственного вычисления силы взаимодействия между реальными катушками. Поэтому рациональнее произвести расчет для более простых форм, а затем перейти к более сложным, применяя метод вычисления погрешности, получаемой при таком упрощении.

\* Первые катушки будем называть слонстыми, а вторые винтовыми.



Общий метод определения сил взаимодействия между двумя проводниками, по которым течет ток, состоит в нахождении взаимной энергии  $W$  обеих катушек, равной

$$W = I_1 I_2 M,$$

где  $M$  — коэффициент взаимной индукции (или взаимная индуктивность), определяемый формулой (Г).

Зная взаимную энергию, легко уже найти и силу взаимодействия  $F$  по какому-либо направлению  $z$ ; для этого необходимо лишь продифференцировать  $W$  по  $z$ , т. е.

$$F = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial z}.$$

Следующие параграфы посвящены выводу взаимной энергии двух катушек с различной формой обмотки.

### § 3. Взаимная энергия между двумя слоистыми катушками винтовой формы

Взаимную энергию слоистых винтовых катушек можно представить как сумму энергий катушек, в которых ток течет сплошным слоем по поверхности цилиндра в направлении, перпендикулярном к образующей цилиндра, и катушек, в которых ток течет сплошным же слоем в направлении образующей цилиндра. При этом плотность тока в первых катушках представляет собой составляющую плотности тока винтообразной катушки по оси, перпендикулярной к образующей цилиндра, а во вторых — составляющую в направлении образующей.

Обозначим вектор плотности тока в слоистой винтообразной катушке через  $j$ ; тогда первая составляющая будет:

$$j_0 = j \cos \alpha, \quad (1)$$

а вторая

$$j_x = j \sin \alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — угол (рис. 23) между касательной к винтовой линии и касательной к поверхности цилиндра, перпендикулярной к образующей.

Ввиду малости угла  $\alpha$ ,  $\sin \alpha$  можно заменить самим углом  $\alpha$ , а  $\cos \alpha$  единицей и, следовательно, положить:

$$j_0 = j; \quad j_x = j\alpha.$$

Угол  $\alpha$  можно выразить через отношение шага винтовой линии  $h$  к длине окружности цилиндра, т. е.

$$\alpha = \frac{h}{2\pi r} = \frac{p}{r}, \quad (3)$$

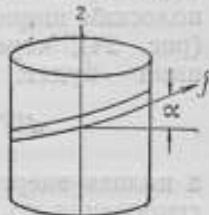


Рис. 23. Цилиндр с винтовой обмоткой

где  $r$  — радиус цилиндра, а  $p = \frac{n}{2\pi}$  — шаг винтовой линии, приходящейся на единицу угла поворота винтовой линии.

Следовательно, для одной из катушек будем иметь:

$$J_{10} = j_1; \quad J_{1x} = j_1 \frac{p_1}{r_1},$$

а для другой

$$J_{20} = j_2; \quad J_{2x} = j_2 \frac{p_2}{r_2}.$$

С другой стороны, плотность тока, т. е. сила тока, приходящаяся на единицу длины образующей, выразится как

$$j_1 = \frac{I_1 \omega_1}{l_1}, \quad j_2 = \frac{I_2 \omega_2}{l_2}, \quad (4)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — силы токов в реальных проводах катушек;

$\omega_1$  и  $\omega_2$  — число их витков, а

$l_1$  и  $l_2$  — длины той и другой катушки.

Поэтому

$$J_{10} = \frac{I_1 \omega_1}{l_1}; \quad J_{1x} = \frac{I_1 \omega_1}{l_1} \frac{p_1}{r_1};$$

$$J_{20} = \frac{I_2 \omega_2}{l_2}; \quad J_{2x} = \frac{I_2 \omega_2}{l_2} \frac{p_2}{r_2}.$$

Число витков  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно выразить через длину цилиндра и шаг обмотки следующим образом:

$$\omega_1 = \frac{l_1}{h_1} = \frac{l_1}{2\pi p_1} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{l_2}{h_2} = \frac{l_2}{2\pi p_2},$$

и поэтому

$$J_{10} = \frac{I_1}{2\pi p_1}, \quad J_{20} = \frac{I_2}{2\pi p_2}; \quad (5)$$

$$J_{1x} = \frac{I_1}{2\pi r_1}, \quad J_{2x} = \frac{I_2}{2\pi r_2}. \quad (6)$$

Обозначим взаимную индуктивность между двумя любыми концентрическими круговыми токами, протекающими по двум полоскам шириной  $dz'$  и  $dz''$ , взятым на обоих цилиндрах (рис. 24), через  $M_z$ ; тогда  $dW$  — взаимная энергия между ними — будет:

$$dW = j_{10} dz' j_{20} dz'' M_z = \frac{I_1 I_2}{p_1 p_2} M_z \frac{dz'}{2\pi} \frac{dz''}{2\pi},$$

а полная энергия, очевидно, получится путем двойного интегрирования по обеим длинам цилиндров, т. е.

$$W = \frac{I_1 I_2}{p_1 p_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_1}^{z_2} M_z \frac{dz'}{2\pi} \frac{dz''}{2\pi}, \quad (7)$$

где  $z_1, z_2, z_3, z_4$  — расстояния от начала координат до начальных и конечных плоскостей катушек, как показано на рис. 24. Если начало координат поместить на оси катушек в нижней плоскости второй катушки, то  $z_1 = 0$ . Так как взаимная индуктивность двух линейных круговых контуров выражается формулой (см. монографию Л. В. Залуцкого „Введение в теорию ампер-весов“, стр. 55, Лениздат, 1946):

$$M_z = r_1 r_2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta' d\theta''}{\sqrt{z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}},$$

то

$$W = I_1 I_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta''}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{z_3}^{z_4} dz'' \frac{\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} \cos \theta}{\sqrt{z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}},$$

где

$\theta'$  и  $\theta''$  — азимуты элементов одного и другого контуров, как показано на рисунке;  
 $\theta = \theta' - \theta''$ ;  $z'$  и  $z''$  — координаты элементов  $dz'$  и  $dz''$ , а  
 $z = z' - z''$ .

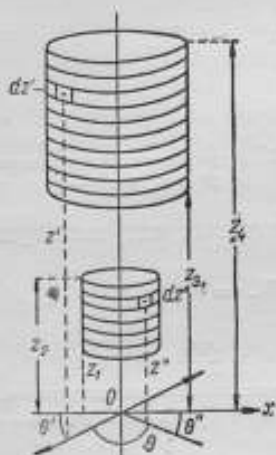


Рис. 24. Система слоистых соленоидов винтовой формы

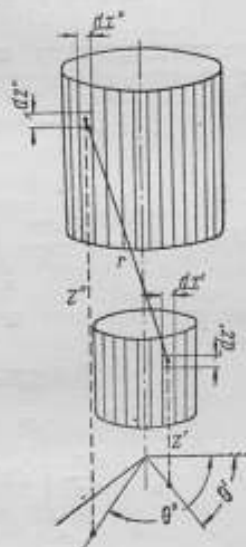


Рис. 25. Система цилиндров, по которым ток протекает по образующим

Рассмотрим далее взаимную энергию двух цилиндров, по которым протекает ток по их образующим. Для этого разделим всю поверхность цилиндра на бесконечно большое число полосок шириною  $dx'$  и  $dx''$  (рис. 25) и найдем сначала вза-

имную энергию двух таких полосок. Плотность тока в направлении образующей цилиндра выражается формулами (6), поэтому сила тока в каждой полоске будет:

$$dI_1 = \frac{I_1}{2\pi r_1} dx_1 \quad \text{и} \quad dI_2 = \frac{I_2}{2\pi r_2} dx_2,$$

а взаимная энергия  $dW_2$ , по общей формуле (A), представится в виде:

$$dW_2 = \frac{I_1 dx'}{2\pi r_1} \frac{I_2 dx''}{2\pi r_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz dz''}{r},$$

где  $dz'$  и  $dz''$  — элементы длины полоски, а  $r$  — расстояние между этими элементами, которое можно выразить в функции координат этих элементов:

$$r^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2.$$

Обозначив  $z' - z'' = z$  и взяв полярные координаты, получим:

$$r^2 = z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta'' - \theta').$$

Кроме того, ширину полосок  $dx'$  и  $dx''$  можно выразить также в полярных координатах:

$$dx' = r_1 d\theta' \quad \text{и} \quad dx'' = r_2 d\theta'',$$

и тогда

$$W_2 = I_1 I_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta''}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{z_1}^{z_2} dz'' \frac{1}{V z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}.$$

Общая же взаимная энергия винтовых катушек будет суммой, т. е.

$$W = W_1 + W_2 = I_1 I_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta''}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{z_1}^{z_2} dz'' \frac{\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} \cos \theta + 1}{V z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}. \quad (8)$$

#### § 4. Взаимная энергия двух винтовых катушек

Взаимную энергию двух винтовых катушек найдем, пользуясь формулой (Г):

$$W = I_1 I_2 \oint \oint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1 ds_2)}{r r'}. \quad (9)$$

где  $P'$  и  $P''$  — произвольные точки на винтовой линии первой и второй катушек и

$ds_1$  и  $ds_2$  — элементы винтовой линии в этих точках (рис. 26).

Но

$$PP'' = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2,$$

где  $x', y', z'$  — координаты точки  $P'$ , а  $x'', y'', z''$  — координаты точки  $P''$ .

При этом ось  $z$  совпадает с осью катушек, а оси  $x$  и  $y$  имеют произвольные направления, оставаясь перпендикулярными друг к другу и к оси  $z$ . Начало координат поместим в какую-либо точку  $O$  на оси  $z$ . Обозначим вертикальную координату начала первой катушки, т. е. точки  $A_1$  через  $z_1$ , а координату конца, т. е. точки  $A_2$ , через  $z_2$ . Точно так же обозначим координату точки  $A_3$  — начала второй катушки через  $z_3$ , а координату точки  $A_4$  — конца второй катушки через  $z_4$  и заменим прямоугольные координаты цилиндрическими.

Тогда

$$\begin{aligned} x' &= r_1 \cos \theta'; & x'' &= r_2 \cos \theta''; \\ y' &= r_1 \sin \theta'; & y'' &= r_2 \sin \theta'' \end{aligned}$$

и

$$PP''^2 = (z'' - z')^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta'' - \theta'). \quad (10)$$

Кроме того, выразим координаты  $z'$  и  $z''$  через углы  $\theta'$  и  $\theta''$ . На основании соотношения (3) будем иметь:

$$z' = z_1 + p_1(\theta' - \theta_1) \quad \text{и} \quad z'' = z_3 + p_2(\theta'' - \theta_3), \quad (11)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_3$  — полярные координаты точек  $A_1$  и  $A_3$ . Элементы длин винтовых линий  $ds_1$  и  $ds_2$  напомним следующим образом:

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = (r_1^2 + p_1^2) d\theta'^2; \\ ds_2^2 &= dx''^2 + dy''^2 + dz''^2 = (r_2^2 + p_2^2) d\theta''^2. \end{aligned} \quad (12)$$

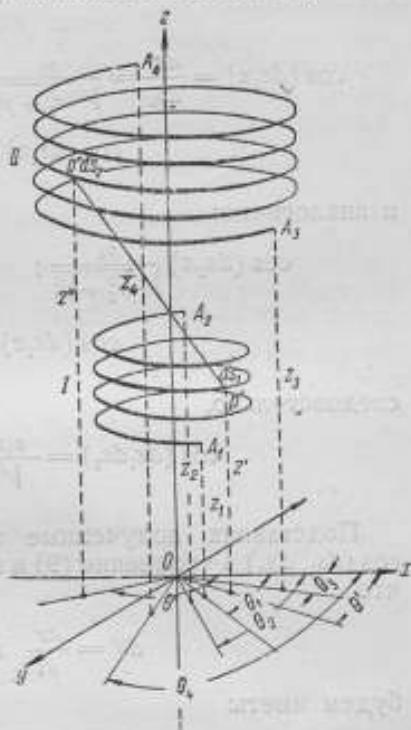


Рис. 26. Система двух винтообразных соленоидов

По формулам аналитической геометрии имеем:

$$\cos(ds_1 ds_2) = \cos(ds_1 x) \cos(ds_2 x) + \cos(ds_1 y) \cos(ds_2 y) + \cos(ds_1 z) \cos(ds_2 z);$$

$$\cos(ds_1 x) = \frac{dx'}{ds_1} = \frac{p_1}{\sqrt{r_1^2 + p_1^2}}; \quad \cos(ds_1 y) = -\frac{r_1 \sin \theta'}{\sqrt{r_1^2 + p_1^2}};$$

$$\cos(ds_1 z) = \frac{r_1 \cos \theta'}{\sqrt{r_1^2 + p_1^2}},$$

и аналогично:

$$\cos(ds_2 x) = \frac{p_2}{\sqrt{r_2^2 + p_2^2}}; \quad \cos(ds_2 y) = -\frac{r_2 \sin \theta''}{\sqrt{r_2^2 + p_2^2}};$$

$$\cos(ds_2 z) = \frac{r_2 \cos \theta''}{\sqrt{r_2^2 + p_2^2}};$$

следовательно,

$$\cos(ds_1 ds_2) = \frac{p_1 p_2 + r_1 r_2 \cos(\theta'' - \theta')}{\sqrt{r_1^2 + p_1^2} \sqrt{r_2^2 + p_2^2}}. \quad (13)$$

Подставляя полученные значения для  $\overline{PP'}$ ,  $ds_1$ ,  $ds_2$  и  $\cos(ds_1 ds_2)$  в уравнение (9) и замечая, согласно уравнению (11), что

$$d\theta' = \frac{dz'}{p_1} \quad \text{и} \quad d\theta'' = \frac{dz''}{p_2},$$

будем иметь:

$$W = I_1 I_2 \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{z_1}^{z_2} dz'' \frac{\frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} \cos \theta + 1}{\sqrt{z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}}, \quad (14)$$

где

$$z = z'' - z' \quad \text{и} \quad \theta = \theta'' - \theta'.$$

Нетрудно видеть, что угол  $\theta$  является функцией координат  $z'$  и  $z''$ . Действительно, из уравнений (11) имеем:

$$\theta'' = \frac{z''}{p_2} - \frac{z_2}{p_2} + \theta_0 \quad \text{и} \quad \theta' = \frac{z'}{p_1} - \frac{z_1}{p_1} + \theta_1.$$

Отсюда

$$\theta = \theta'' - \theta' = \frac{z''}{p_2} + \left(\theta_0 - \frac{z_2}{p_2}\right) - \frac{z'}{p_1} - \left(\theta_1 - \frac{z_1}{p_1}\right) = \theta(z', z''). \quad (15)$$

Сравнивая полученное выражение для энергии двух винтообразных катушек с выражением (8) для взаимной энергии двух слоистых катушек, видим, что оно отличается только

меньшим числом интегралов, подинтегральная же функция в обоих выражениях одинакова и пределы интегрирования также одинаковы.

Интегралы в том виде, как они написаны в уравнениях (8) и (14), не могут быть выражены в простейших функциях, поэтому решать их приходится, разлагая подинтегральную функцию в ряд. Но прежде чем переходить к такому разложению, преобразуем пределы интегрирования в выражениях (8) и (14).

### § 5. Преобразование пределов интегрирования

Подинтегральная функция в выражениях (8) и (14) является функцией от  $z$  и  $\theta$ , причем  $z = z'' - z'$  и  $\theta = \theta(z', z'')$ . Поэтому для краткости обозначим ее через  $f[(z'' - z'), \theta(z', z'')]$  и будем искать новые пределы интегрирования следующего интеграла:

$$\frac{W}{I_1 I_2} = M = \int_{z_1}^{z_2} dz'' \int_{z_3}^{z_4} f[(z'' - z'), \theta(z', z'')] dz'. \quad (16)$$

Введем новую переменную:  $x = z'' - z'$ ; тогда

$$z'' = x + z' \quad \text{и} \quad dz'' = dx.$$

Пределы же интегрирования во втором интеграле будут:

$$z_3 - z' \quad \text{и} \quad z_4 - z'.$$

Следовательно,

$$M = \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{z_3 - z'}^{z_4 - z'} f[x, \theta(z', x + z')] dx.$$

Введем далее еще новую переменную:  $y = z_4 - z'$ ; тогда

$$z' = z_4 - y \quad \text{и} \quad dz' = -dy,$$

а пределы в первом интеграле изменятся на  $z_4 - z_1$  и  $z_4 - z_2$ , а во втором на  $y - (z_4 - z_3)$  и  $y$ ; поэтому

$$M = \int_{z_4 - z_2}^{z_4 - z_1} dy \int_{y - (z_4 - z_3)}^y f[x, \theta(z_4 - y, x - y + z_4)] dx.$$

Разобьем второй интеграл на два: один в пределах от 0 до  $y$  и другой от 0 до  $y - (z_4 - z_3)$ ; тогда

$$M = \int_{z_4 - z_2}^{z_4 - z_1} dy \int_0^y f dx - \int_{z_4 - z_3}^{z_4 - z_2} dy \int_0^{y - (z_4 - z_3)} f dx.$$

Далее разобьем так же первый интеграл первого члена на два: в пределах от 0 до  $z_4 - z_3$  и от 0 до  $z_4 - z_1$ ; тогда

$$M = \int_0^{z_4 - z_3} dy \int_0^y f dx - \int_0^{z_4 - z_1} dy \int_0^y f dx - \int_{z_4 - z_1}^{z_4 - z_3} dy \int_0^{y - (z_4 - z_3)} f dx. \quad (17)$$

В последнем из этих двойных интегралов введем еще раз новую переменную:  $y' = y - (z_4 - z_3)$ , откуда

$$y = y' + (z_4 - z_3), \quad dy' = dy.$$

В таком случае последний интеграл примет следующий вид:

$$I = \int_{z_4 - z_1}^{z_4 - z_3} dy' \int_0^{y'} f[x, \theta(z_3 - y', x - y' + z_3)] dx.$$

Разобьем первый из этих интегралов на два в пределах от 0 до  $z_3 - z_2$  и от 0 до  $z_3 - z_1$ ; в таком случае будем иметь:

$$I = \int_0^{z_3 - z_2} dy' \int_0^{y'} f[x, \theta_1(x, y')] dx - \int_0^{z_3 - z_1} dy' \int_0^{y'} f[x, \theta_1(x, y')] dx,$$

где

$$\theta_1(x, y') = \theta(z_3 - y', x - y' + z_3). \quad (18)$$

Заменяя опять в этих интегралах переменную  $y'$  на  $y$  и внося полученное значение  $I$  в выражение (17) и обозначив при этом

$$\theta(x, y) = \theta(z_4 - y, x - y + z_4),$$

получим

$$M = \int_0^{z_4 - z_3} dy \int_0^y f[x, \theta(x, y)] dx - \int_0^{z_4 - z_1} dy \int_0^y f[x, \theta(x, y)] dx - \\ - \int_0^{z_3 - z_2} dy \int_0^y f[x, \theta_1(x, y)] dx + \int_0^{z_3 - z_1} dy \int_0^y f[x, \theta_1(x, y)] dx. \quad (19)$$

Для того чтобы найти выражение функции  $\theta(x, y)$  и  $\theta_1(x, y)$  в явном виде, необходимо в уравнении (15)  $z'$  и  $z''$  заменить соответствующими значениями:  $z' = z_4 - y$ ;  $z'' = x - y + z_4$ , или же  $z' = z_3 - y$ ;  $z'' = x - y + z_3$ , и следовательно,

$$\theta(x, y) = \frac{x}{p_2} - \frac{y}{p_2} + \frac{z_4}{p_2} + \theta_2 - \frac{z_3}{p_2} - \frac{z_4}{p_1} + \frac{y}{p_1} - \theta_1 + \frac{z_1}{p_1} = \\ = \frac{x}{p_2} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)y + \theta_3 - \theta_1 - \frac{z_4 - z_1}{p_1} + \frac{z_4 - z_3}{p_2};$$



далее из уравнения (11) вытекает, что

$$\frac{z_4 - z_3}{p_2} = \theta_4 - \theta_3;$$

поэтому,

$$\theta(x, y) = \frac{x}{p_2} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)y + \theta_4 - \theta_1 - \frac{z_4 - z_1}{p_1}. \quad (20)$$

Аналогично найдем, что

$$\theta_1(x, y) = \frac{x}{p_2} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)y + \theta_3 - \theta_2 - \frac{z_3 - z_2}{p_1}. \quad (21)$$

Прибавим и вычтем в правой части уравнения (20) величину  $\frac{z_2}{p_1}$ , а в уравнении (21) величину  $\frac{z_1}{p_1}$ ; тогда

$$\theta(x, y) = \frac{x}{p_2} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)y + \theta_4 - \theta_1 - \frac{z_4 - z_2}{p_1} + \frac{z_1 - z_2}{p_1},$$

$$\theta_1(x, y) = \frac{x}{p_2} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)y + \theta_3 - \theta_2 - \frac{z_3 - z_1}{p_1} - \frac{z_1 - z_2}{p_1}.$$

Замечая, что

$$\frac{z_1 - z_2}{p_1} = \theta_1 - \theta_2,$$

получим

$$\theta(x, y) = \frac{x}{p_2} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)y + \theta_4 - \theta_2 - \frac{z_4 - z_2}{p_1}, \quad (22)$$

$$\theta_1(x, y) = \frac{x}{p_2} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)y + \theta_3 - \theta_1 - \frac{z_3 - z_1}{p_1}. \quad (23)$$

Обозначим правую часть выражения (20) через  $\theta_{4,1}(x, y)$ , а правую часть выражения (21) через  $\theta_{3,2}(x, y)$  и аналогично в уравнениях (22) и (23) через  $\theta_{4,2}(x, y)$  и  $\theta_{3,1}(x, y)$ .

Очевидно, что

$$\theta_{4,1}(x, y) = \theta_{4,2}(x, y) \text{ и } \theta_{3,2}(x, y) = \theta_{3,1}(x, y).$$

В таком случае выражение (19) для  $M$  можно переписать в следующем виде:

$$M = \int_0^{z_4 - z_1} dy \int_0^y f[x, \theta_{4,2}(x, y)] dx - \int_0^{z_4 - z_1} dy \int_0^y f[x, \theta_{4,1}(x, y)] dx + \\ + \int_0^{z_3 - z_2} dy \int_0^y f[x, \theta_{3,1}(x, y)] dx - \int_0^{z_3 - z_2} dy \int_0^y f[x, \theta_{3,2}(x, y)] dx. \quad (24)$$

Как видим, все четыре двойных интеграла представляют собой одну и ту же функцию от верхнего предела  $z = z_i - z_j$ . Обозначим ее через  $m(z)$ , т. е.

$$m(z) = \int_0^z dy \int_0^y f[x, \theta(x, y)] dx;$$

тогда

$$M = m(z_4 - z_2) - m(z_4 - z_1) + m(z_3 - z_1) - m(z_3 - z_2). \quad (25)$$

В развернутом виде функция  $m(z)$  имеет вид:

$$m(z) = \int_0^z dy \int_0^y \frac{\frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} \cos \theta_z + 1}{V x^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_z} dx, \quad (26)$$

где

$$\theta_z = \frac{x}{p_2} + \left( \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) y + \theta - \frac{z}{p_1}, \quad (27)$$

а  $\theta_z$  и  $z$  могут принимать значения:

$$\begin{aligned} \theta_4 - \theta_2, \quad \theta_4 - \theta_1, \quad \theta_3 - \theta_1 \quad \text{и} \quad \theta_3 - \theta_2, \\ z_4 - z_2, \quad z_4 - z_1, \quad z_3 - z_1 \quad \text{и} \quad z_3 - z_2. \end{aligned}$$

Как видно,  $z$  представляет собой четыре возможных расстояния между крайними плоскостями катушек, а  $\theta_z$  — четыре возможных азимута между концами проводов обеих катушек.

Хотя угол  $\theta_z$  является функцией двух переменных  $x$  и  $y$ , однако в практике шаг винтовой обмотки в обеих катушках делается один и тот же, т. е.  $p_1 = p_2$ , и поэтому член, содержащий переменную  $y$ , пропадает и  $\theta_z$  становится функцией только одной переменной  $x$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $p_1 = p_2$ . В таком случае и все подынтегральные функции в выражении (26) для  $m(z)$  будут функцией только от  $x$ .

Вследствие этого двойное интегрирование можно свести к одному, применяя метод интегрирования по частям.

Обозначим внутренний интеграл выражения (26) как некоторую функцию  $\psi(y)$ ; тогда

$$m(z) = \int_0^z \psi(y) dy.$$

Интегрируя эти выражения по частям, получим:

$$m(z) = z \psi(z) - \int_0^z y \frac{d\psi(y)}{dy} dy.$$

Но производная от  $\psi(y)$  по верхнему пределу является подынтегральной функцией; поэтому

$$m(z) = z \int_0^z f(x, \theta_z) dx - \int_0^z y f(y, \theta_z) dy.$$

Так как переменная интегрирования может быть обозначена любой буквой, то, заменяя во втором интеграле переменную  $y$  на  $x$ , будем иметь:

$$m(z) = \int_0^z (z-x) \frac{\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} \cos \theta_z + 1}{\sqrt{x^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_z}} dx.$$

Преобразуем, кроме того, подынтегральную функцию, заменяя под корнем  $\cos \theta_z = 2 \cos^2 \frac{\theta_z}{2} - 1$ . Тогда, обозначив

$$\frac{4r_1 r_2}{x^2 + (r_1 + r_2)^2} = k^2, \quad (28)$$

получим:

$$m(z) = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}} \int_0^z (z-x) \frac{k \left( \frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} \cos \theta_z + 1 \right)}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta_z}{2}}} dx. \quad (29)$$

В дальнейшем значок  $z$  у  $\theta$  будем опускать.

### § 6. Разложение подынтегральной функции в ряд

Рассмотрим сначала функцию

$$\psi(\theta) = \frac{k}{4\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}},$$

которая является четной периодической с периодом, равным  $2\pi$ . Разлагая ее в ряд Фурье по косинусам, кратным периоду  $2\pi$ , получим:

$$\frac{k}{4\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} = \frac{1}{2} U_0(k) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \cos 2n\theta, \quad (30)$$

где коэффициенты ряда Фурье  $U_n$ , являющиеся функциями  $k$ , определяются формулами:

$$U_n(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} d\theta. \quad (31)$$

Функции  $U_0(k)$  и  $U_1(k)$  могут быть найдены непосредственным интегрированием, остальные же определяются через  $U_0(k)$  и  $U_1(k)$  по рекуррентным формулам.

Так,

$$U_0(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} = \frac{k}{\pi} K(k), \quad (32)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого ряда. Аналогично

$$\begin{aligned} U_1(k) &= \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} d\theta = \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} d\theta = \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \cos^2 \theta + 1 - 1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} d\theta - \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} = \\ &= -\frac{2}{k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta} d\theta + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} - \\ &- \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} = -\frac{2}{k\pi} E(k) + \frac{2}{k\pi} K(k) - \frac{k}{\pi} K(k), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} U_1(k) &= \frac{2}{\pi} \frac{K(k) - E(k)}{k} - \frac{kK(k)}{\pi} = \\ &= \frac{1}{k\pi} [(2 - k^2)K(k) - E(k)]. \end{aligned} \quad (33)$$

На основании равенства (30) мы можем написать:

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2\sqrt{r_1 r_2} \sqrt{1-k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[ U_0(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \cos n\theta \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, аналогично разложению функции  $\psi(\theta)$ , можно разложить в ряд Фурье и функцию

$$\psi_1(\theta) = \frac{k \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} \cos \theta}{2\sqrt{r_1 r_2} \sqrt{1-k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}},$$

которая также является четной периодической, и написать:

$$\psi_1(\theta) = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{p_1 p_2} \left[ U'_0(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(k) \cos n\theta \right], \quad (35)$$

где коэффициенты  $U'_n(k)$  имеют другое значение, а именно:

$$U'_n(\theta) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \cos n\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta.$$

На основании формулы тригонометрии мы можем произведение косинусов заменить суммой косинусов и выразить функцию  $U'_n(\theta)$  в следующем виде:

$$U'_n(\theta) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta$$

или, на основании уравнения (31),

$$U'_n(\theta) = \frac{1}{2} [U_{n+1}(k) - U_{n-1}(k)].$$

Подставляя это значение в уравнение (35), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{k \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} \cos \theta}{2 \sqrt{r_1 r_2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} &= \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{p_1 p_2} \left[ U_1(k) + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} [U_{n+1}(k) - U_{n-1}(k)] \cos n\theta \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Складывая почленно ряды (34) и (36), в левой части получим подынтегральную функцию интеграла (29) без множителя  $(z-x)$ , а в правой — ряд, расположенный по косинусам кратных дуг  $\theta$ . Поэтому, умножая после сложения обе части на  $(z-x)$  и интегрируя их в пределах от 0 до  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \int_0^z (z-x) \left\{ U_0(x) + \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} U_1(k) + \right. \\ &\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \cos \theta \left[ \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} (U_{n+1}(k) - U_{n-1}(k)) + 2U_n(k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

### § 7. Выражение взаимной энергии катушек в виде ряда

Сопоставляя выражения (8) и (14) для взаимной энергии двух катушек различной формы с уравнениями (15), (24), (25), (29) и (37), можем написать их в виде рядов.

Так, выражение (8) для взаимной индуктивности двух слоистых винтообразных катушек напишется в виде ряда:

$$M_1 = \frac{w_1}{I_1 I_2} = \frac{1}{V r_1 r_2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta''}{2\pi} \int_0^z (z-x) \left\{ U_0(k) + \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} U_1(k) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \theta \left[ \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} (U_{n+1}(k) - U_{n-1}(k) + 2U_n(k)) \right] \right\} dx, \quad (38)$$

а выражение (14) для взаимной индуктивности двух винтовых катушек — в виде ряда:

$$M_2 = \frac{w_2}{I_1 I_2} = \frac{1}{V r_1 r_2} \int_0^z (z-x) \left\{ U_0(k) + \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} U_1(k) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \left[ \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} (U_{n+1}(k) - U_{n-1}(k) + 2U_n(k)) \right] \right\} dx. \quad (39)$$

Так как  $\theta = \theta'' - \theta'$ , то во втором интеграле можно заметить  $d\theta'' = d\theta$ , и тогда первый интеграл в выражении (38) делается равным единице, а  $M_1$  принимает вид

$$M_1 = \frac{1}{V r_1 r_2} \int_0^z (z-x) U_0(k) dx + \frac{V r_1 r_2}{p_1 p_2} \int_0^z (z-x) U_1(k) dx + \\ + \frac{1}{2\pi V r_1 r_2} \int_0^z (z-x) \left[ \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} (U_{n+1}(k) - U_{n-1}(k)) + \right. \\ \left. + 2U_n(k) \right] dx \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta.$$

Так как последний интеграл от  $\cos n\theta$  равен нулю, то

$$M_1 = m_0(z) + m_z(z), \quad (40)$$

где

$$m_0(z) = \frac{V r_1 r_2}{p_1 p_2} \int_0^z (z-x) U_1(k) dx;$$

$$m_z(z) = \frac{1}{V r_1 r_2} \int_0^z (z-x) U_0(k) dx. \quad (41)$$

При этом следует помнить, что во всех этих выражениях для  $M_1$  и  $M_2$ , после выполнения интегрирования, необходимо вместо  $z$  подставлять его значения  $z_4 - z_2$ ;  $z_4 - z_1$ ;  $z_3 - z_1$ ;  $z_3 - z_2$  и составлять сумму аналогично уравнению (25). Поэтому выражение (40) в развернутом виде будет иметь вид

$$M_1 = m_0(z_4 - z_2) - m_0(z_4 - z_1) + m_0(z_3 - z_1) - m_0(z_3 - z_2) + \\ + m_z(z_4 - z_2) - m_z(z_4 - z_1) + m_z(z_3 - z_1) - m_z(z_3 - z_2). \quad (42)$$

Сравнивая (39) с (40), получим:

$$M_2 = M_1 + m_x(z, \theta) = m_0(z) + m_z(z) + m_x(z, \theta), \quad (43)$$

где

$$m_x(z, \theta) = \frac{1}{V r_1 r_2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z (z-x) \cos n\theta \left[ \frac{r_1 r_2}{p_1 p_2} (U_{n+1}(k) - U_{n-1}(k)) + \right. \\ \left. + 2U_n(k) \right] dx, \quad (44)$$

т. е. взаимная индуктивность двух винтовых катушек равна сумме взаимной индуктивности двух слоистых катушек плюс некоторый добавочный член, который зависит не только от взаимных расстояний между катушками, но и от азимутов конечных точек винтовых обмоток той и другой катушки, так как после выполнения интегрирования мы должны подставить вместо  $\theta$  ее значения  $\theta_4 - \theta_2$  и т. д.

Нетрудно видеть из уравнений (6), (7), (32) и (33), что функция  $m_0(z)$  представляет собой взаимную индуктивность двух слоистых катушек, в которых ток протекает перпендикулярно образующим цилиндра, а  $m_z(z)$  — взаимную индуктивность двух слоистых же катушек, в которых ток протекает вдоль образующих цилиндров.

Легко также видеть из уравнения (41), что при малых значениях  $p_1$  и  $p_2$ , как это обычно имеет место, функция  $m_0(z)$  значительно больше функции  $m_z(z)$ . Поэтому будем называть, в выражении (43) для взаимной индуктивности винтовых катушек,  $m_0(z)$  — главным членом, а остальные два  $m_z(z)$  и  $m_x(z, \theta)$  — поправочными. Из них  $m_z(z)$  представляет собой поправку на осевую составляющую плотности тока винтовой катушки, а  $m_x(z, \theta)$  — азимутальную поправку, т. е. поправку на незамкнутость винтовых проводников.

Для нахождения интегралов в уравнениях (41) и (44) необходимо предварительно рассмотреть свойства функций  $U_n(k)$ , которые изложены в следующих трех параграфах.

### § 8. Рекуррентные формулы для нахождения функции $U_n(k)$

Для нахождения рекуррентных формул продифференцируем обе части ряда (30) по  $\theta$ ; тогда

$$\frac{k^2 \sin \theta \cos \theta}{4(1 - k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \sin 2n\theta.$$

Умножив обе части уравнения на  $1 - k^2 \cos^2 \theta$  и выражая левую часть в виде ряда, расположенного по косинусам кратных дуг, получим:

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 4n(k) \sin 2\theta \cos 2n\theta + \frac{k^2}{4} U_0 \sin 2\theta &= \\ &= 2(1 - k^2 \cos^2 \theta) \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \sin 2n\theta \end{aligned}$$

или, после замены  $\cos^2 \theta$  косинусами двойного угла, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \sin 2\theta \cos 2n\theta + \frac{k^2}{4} U_0(k) \sin 2\theta &= \\ = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \sin 2n\theta - k^2 \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \sin 2n\theta - \\ - k^2 \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \cos 2\theta \sin 2n\theta. \end{aligned}$$

Произведения  $\sin 2\theta \cos 2n\theta$  и  $\cos 2\theta \sin 2n\theta$  можно заменить по формулам тригонометрии:

$$\sin 2\theta \cos 2n\theta = \frac{1}{2} [\sin (n+1) 2\theta - \sin (n-1) 2\theta].$$

$$\cos 2\theta \sin 2n\theta = \frac{1}{2} [\sin (n+1) 2\theta + \sin (n-1) 2\theta].$$

Поэтому предыдущее равенство пишется в форме:

$$\frac{k^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \sin (n+1) 2\theta - \frac{k^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \sin (n-1) 2\theta +$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{k^2}{4} U_0(k) \sin 2\theta = (2 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \sin 2n\theta - \\
 & - \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \sin (n+1) 2\theta - \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n U_n(k) \sin (n-1) 2\theta.
 \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты обеих частей при одинаковых синусах, например при  $\sin 2n\theta$ , получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{k^2}{4} U_{n-1} - \frac{k^2}{4} U_{n+1} = (2 - k^2) n U_n - \\
 & - \frac{k^2}{2} (n-1) U_{n-1} - \frac{k^2}{2} (n+1) U_{n+1}
 \end{aligned}$$

или, после приведения подобных членов,

$$\frac{(n+1)}{2} U_{n+1}(k) = \frac{2n(1-k^2)}{k^2} U_n(k) - \left(n - \frac{1}{2}\right) U_{n-1}(k). \quad (45)$$

Эта формула позволяет определить функцию  $U_n(k)$ , когда известны две предыдущие:  $U_{n-1}(k)$  и  $U_{n-2}(k)$ . Так как мы знаем функции  $U_0(k)$  и  $U_1(k)$ , то тем самым мы можем определить  $U_2, U_3$  и т. д. Так, например,

$$\begin{aligned}
 U_2(k) &= \frac{4}{3k} (2 - k^2) U_1(k) - \frac{1}{3} U_0(k) = \\
 &= \frac{4}{3k\pi} [(2 - k^2) K(k) - (2 - k^2) E(k) - k^2 K(k)],
 \end{aligned}$$

### § 9. Формула для нахождения производной функции $U_n(k)$

Производная от функции  $U_n(k)$  по  $k$  может быть выражена также через функции  $U_n, U_{n-1}$  и т. д. Для нахождения такой зависимости продифференцируем выражение (31); тогда имеем:

$$U'_n(k) = \frac{dU_n}{dk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\theta}{(1 - k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta.$$

Представим  $\cos 2n\theta$  как косинус суммы двух дуг:  $2(n-1)\theta$  и  $2\theta$ ; тогда, применяя формулу тригонометрии, получим:

$$U'_n(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos (n-1) 2\theta \cos 2\theta}{(1 - k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (n-1) 2\theta \sin 2\theta}{(1 - k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta$$

или

$$U'_n(k) = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(n-1) 2\theta \cos^2 \theta d\theta}{(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(n-1) 2\theta \sin^2 \theta}{(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n-1) 2\theta \sin \theta \cos \theta}{(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta.$$

На основании очевидных равенств:

$$\frac{-\sin \theta \cos \theta}{(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{k^2} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}}, \\ \frac{\cos \theta}{(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{1-k^2} \frac{d}{d\theta} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}}, \\ \frac{-\sin \theta}{(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{d}{d\theta} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}}$$

мы можем написать:

$$U'_n(k) = \frac{1}{(1-k^2)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1) 2\theta \cos \theta d \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1) 2\theta \sin \theta d \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} + \\ + \frac{2}{\pi k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(n-1) 2\theta d \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}}.$$

Интегрируя по частям каждый из этих интегралов и замечая, что первые части у них равны нулю, получим:

$$U'_n(k) = \frac{1}{\pi(1-k^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d [\cos \theta \cos(n-1) 2\theta]}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d [\cos(n-1) 2\theta \sin \theta]}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} + \frac{4(n-1)}{\pi k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(n-1) 2\theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} d\theta.$$

Последний из этих интегралов, как видно, равен функции  $U_{n-1}(k)$ ; поэтому, обозначая первый интеграл через  $A$ , а второй через  $B$ , будем иметь:

$$U'_n(k) = \frac{A}{\pi(1-k^2)} + \frac{1}{\pi} B + \frac{4(n-1)}{k^3} U_{n-1}(k).$$

Для нахождения интегралов  $A$  и  $B$  продифференцируем подинтегральные функции и, применяя формулы тригонометрии, сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{d}{d\theta} [\cos \theta \cos (n-1) 2\theta] &= -\sin^2 \theta \cos (n-1) 2\theta - \\ &- (n-1) \sin 2\theta \sin (n-1) 2\theta = \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta \cos 2\theta - \\ &- \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta - (n-1) \sin 2\theta \sin (n-1) 2\theta = \\ &= \frac{1}{4} \cos 2n\theta + \frac{1}{4} \cos (n-2) 2\theta - \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta + \\ &+ \frac{1}{2} (n-1) \cos 2n\theta - \frac{1}{2} (n-1) \cos (n-2) 2\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left( n - \frac{1}{2} \right) \cos 2n\theta - \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta - \frac{1}{2} \left( n - \frac{3}{2} \right) \cos (n-2) 2\theta. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{d}{d\theta} [\cos (n-1) 2\theta \sin \theta] &= \cos^2 \theta \cos (n-1) 2\theta - \\ &- (n-1) \sin 2\theta \sin (n-1) 2\theta = \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta + \\ &+ \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta \cos 2\theta - (n-1) \sin 2\theta \sin (n-1) 2\theta = \\ &= \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta + \frac{1}{4} \cos 2n\theta + \frac{1}{4} \cos (n-2) 2\theta + \\ &+ \frac{1}{2} (n-1) \cos 2n\theta - \frac{1}{2} (n-1) \cos (n-2) 2\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left( n - \frac{1}{2} \right) \cos 2n\theta + \frac{1}{2} \cos (n-1) 2\theta - \frac{1}{2} \left( n - \frac{3}{2} \right) \cos (n-2) 2\theta. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в интегралы  $A$  и  $B$  и замечая, что в результате подстановки полученные интегралы представляют собой функции  $U(k)$  различных порядков, будем иметь:

$$\begin{aligned} U'_n &= \frac{\left( n - \frac{1}{2} \right)}{2k(1-k^2)} U_n - \frac{1}{2k(1-k^2)} U_{n-1} - \frac{n-3}{2k(1-k^2)} U_{n-2} + \\ &+ \frac{\left( n - \frac{1}{2} \right)}{2k} U_n + \frac{1}{2k} U_{n-1} - \frac{1}{2k} \left( n - \frac{3}{2} \right) U_{n-2} + \frac{4(n-1)}{k^3} U_{n-1}(k). \end{aligned}$$

Функции  $U_{n-2}(k)$  можно выразить через  $U_n(k)$  и  $U_{n-1}(k)$  по рекуррентной формуле (45), т. е.

$$\left(n - \frac{3}{2}\right) U_{n-2}(k) = 2(n-1) \frac{(2-k^2)}{k^2} U_{n-1}(k) - \left(n - \frac{1}{2}\right) U_n(k).$$

Подставляя это значение и делая приведение подобных членов, получим:

$$U_n(k) = \frac{k\left(n - \frac{1}{2}\right)}{1-k^2} \left[ U_{n-1}(k) - \frac{2-k^2}{k^2} U_n(k) \right]. \quad (46)$$

Таким образом, производная по параметру от любой функции  $U_n(k)$  может быть выражена и через функцию  $U_n(k)$  и через функцию на один порядок ниже.

### § 10. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $U_n(k)$

Общий метод нахождения дифференциального уравнения путем  $n$ -кратного дифференцирования данной функции и исключения из полученных  $n$  уравнений явной зависимости функций от переменной в данном случае трудно применим; поэтому для вывода такого уравнения приходится пользоваться несколько иным способом. Продифференцируем дважды обе части уравнения (30), сначала по переменной  $\theta$ , а затем по  $k$ ; тогда:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{k}{4\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} = \frac{k^2 \cos \theta \sin \theta}{4(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n U_n(k) \sin 2n\theta, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{k}{4\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} &= \frac{k^2(2 \cos^2 \theta - 1)}{4(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} - \frac{3k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 U_n(k) \cos 2n\theta, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} \frac{k}{4\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} &= \frac{1}{4(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{2} U_0'(k) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \cos 2n\theta, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial k^2} \frac{k}{4\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} &= \frac{3k \cos^2 \theta}{4(1-k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{2} U_0''(k) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(k) \cos 2n\theta. \end{aligned} \quad (50)$$

Заменяя в левой части уравнения (48) выражения  $4(1 - k^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$ ,  $4(1 - k^2 \cos^2 \theta)^{3/2}$  значениями из уравнения (49) и (50), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} k^3 (2 \cos^2 \theta - 1) U_0'(k) + k^3 (2 \cos^2 \theta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(k) \cos 2n\theta - \\ & - \frac{1}{2} k^4 \sin^2 \theta U_0''(k) - k^4 \sin^2 \theta \sum_{n=1}^{\infty} U_n''(k) \cos 2n\theta = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 U_n(k) \cos 2n\theta. \end{aligned}$$

Так как это уравнение представляет собой тождество, справедливое для каждого  $\theta$ , то коэффициенты при одинаковых косинусах должны быть равны. Поэтому, приравнявая их при  $\cos 2n\theta$ , получим:

$$k^3 (2 \cos^2 \theta - 1) U_n'(k) - k^4 \sin^2 \theta U_n''(k) = 4n^2 U_n(k),$$

или, заменяя  $\sin^2 \theta$  через  $\cos^2 \theta$ ,

$$\begin{aligned} 2k^3 \cos^2 \theta U_n'(k) - k^3 U_n''(k) - k^4 U_n'(k) + k^4 \cos^2 \theta U_n''(k) = \\ = 4n^2 U_n(k). \end{aligned} \quad (51)$$

Чтобы исключить из этого уравнения  $\cos^2 \theta$ , воспользуемся уравнением (49) и напомним его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{k}{4\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} = k(1 - k^2 \cos^2 \theta) \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \cos 2n\theta + \\ + \frac{1}{2} k(1 - k^2 \cos^2 \theta) U_0(k), \end{aligned}$$

или, заменяя левую часть суммой по формуле (30),

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \cos 2n\theta = k(1 - k^2 \cos^2 \theta) \sum_{n=1}^{\infty} U_n(k) \cos 2n\theta + \\ + \frac{1}{2} k(1 - k^2 \cos^2 \theta) U_0(k). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых  $\cos 2n\theta$ , получим

$$U_n(k) = k U_n(k) - k^3 \cos^2 \theta U_n(k),$$

или

$$U_n(k) \cos^2 \theta = -\frac{U_n(k)}{k^2} + \frac{U_n(k)}{k^2}. \quad (52)$$

Дифференцирование этого уравнения по  $k$  дает:

$$U_n''(k) \cos^2 \theta = \frac{3U_n'(k)}{k^4} - \frac{3U_n''(k)}{k^3} + \frac{U_n'''(k)}{k^2}. \quad (53)$$

Подставляя теперь в уравнение (51) вместо  $U_n$  и  $U_n'$  их значения из уравнений (52) и (53), после приведения подобных членов получим:

$$k^2(1-k^2)U_n''(k) - k(1+k^2)U_n'(k) = (4n^2-1)U_n(k). \quad (54)$$

Это и есть то дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $U_n(k)$ . Его можно представить более удобной для пользования формулой, а именно:

$$\frac{d}{dk} \left[ \frac{1-k^2}{k} U_n'(k) \right] = (4n^2-1) \frac{U_n(k)}{k^3}, \quad (55)$$

откуда легко находим интеграл функции  $\frac{1}{k^3} U_n(k)$ :

$$\int \frac{U_n(k)}{k^3} dk = \frac{1}{4n^2-1} \left[ \frac{1-k^2}{k} U_n'(k) \right] + C. \quad (55a)$$

## § 11. Интегрирование главного члена

Напишем уравнение (41) в следующем виде:

$$\frac{r_1 r_2}{V r_1 r_2} m_1(z) = z \int_0^z U_1(k) dx - \int_0^z x U_1(k) dx, \quad (56)$$

и обозначим первый из этих интегралов через  $I_1$ , и второй через  $I_2$ , т. е.

$$I_1 = \int_0^z U_1(k) dx; \quad I_2 = - \int_0^z x U_1(k) dx. \quad (57)$$

Для нахождения второго из этих интегралов введем вместо  $x$  новую переменную интегрирования  $k$ . Так как  $k$  и  $x$  связаны уравнением (28), то

$$\frac{dk}{k} = - \frac{x dx}{x^2 + (r_1 + r_2)^2},$$

откуда

$$x dx = -4r_1 r_2 \frac{dk}{k^3}.$$

Поэтому второй интеграл  $I_2$  уравнения (56) напишется следующим образом:

$$I_2 = - \int_0^z x U_1(k) dx = 4r_1 r_2 \int_0^k U_1(k) \frac{dk}{k^3},$$

где пределы интегрирования имеют значения:

$$p^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}, \quad k^2 = \frac{4r_1 r_2}{z^2 + (r_1 + r_2)^2}. \quad (58)$$

На основании уравнения (55) находим:

$$\frac{U_1(k)}{k^2} = \frac{1}{3} \frac{d}{dk} \left[ \frac{1-k^2}{k} U_1(k) \right],$$

а из соотношения (46) имеем:

$$U_1(k) = \frac{k}{2(1-k^2)} \left[ U_0(k) - \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) U_1(k) \right],$$

поэтому

$$\frac{U_1(k)}{k^2} = \frac{1}{6} \frac{d}{dk} \left[ U_0(k) - \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) U_1(k) \right]$$

или, заменяя  $U_0(k)$  и  $U_1(k)$  их значениями из соотношений (32) и (33):

$$\frac{U_1(k)}{k^2} = \frac{1}{3k} \frac{d}{dk} \left[ \frac{K(k)}{k} - \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \frac{K(k) - E(k)}{k} \right].$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{4r_1 r_2}{3\pi} \left[ \frac{K(k)}{k} - \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \frac{K(k) - E(k)}{k} \right] - \\ - \frac{4r_1 r_2}{3\pi} \left[ \frac{K(p)}{p} - \left( \frac{2}{p} - 1 \right) \frac{K(p) - E(p)}{p} \right].$$

Последний член не зависит от  $x$ , вследствие чего при вычислении разностей функции  $m_0(z)$  при двух различных значениях  $z$ , как это требуется по формуле (25), он исчезнет, и поэтому в дальнейшем его можем не писать.

Так как

$$\frac{1}{p_1 p_2} = \frac{4\pi^2 \omega_1 \omega_2}{l_1 l_2},$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — числа витков спиральных катушек,  $l_1$  и  $l_2$  — их длины, то

$$m_0(z) = \frac{4\pi^2 \omega_1 \omega_2}{l_1 l_2} x \int_0^z U_1(k) dx + \frac{2\pi \omega_1 \omega_2}{l_1 l_2} \left( \frac{4r_1 r_2}{3} \right) \times \\ \times \sqrt{x^2 + (r_1 + r_2)^2} \left[ K(k) - \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) (K(k) - E(k)) \right]. \quad (59)$$

Интеграл в этом выражении  $I_1$ , согласно формуле (31), можно представить в следующем виде:

$$I_1 = \int_0^z U_1(k) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta \int_0^z \frac{k dx}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}}. \quad (60)$$

Подставляя вместо  $k$  его выражение, получим:

$$I_1 = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\theta}}.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$I_1 = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \ln \left[ \frac{z + \sqrt{z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\theta}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\theta}} \right].$$

Введем следующее обозначение:

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\theta = R^2(2\theta); \quad (61)$$

тогда

$$I_1 = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}}{R(2\theta)} \, d \sin 2\theta.$$

Интегрирование этого выражения по частям дает:

$$I_1 = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\pi} \left[ \sin 2\theta \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}}{R(2\theta)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \\ - \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}}{R(2\theta)} \, d\theta.$$

Так как выражение в квадратных скобках после подстановки пределов обращается в нуль, то, дифференцируя подинтегральное выражение, получим:

$$I_1 = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \frac{R(2\theta)[z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}]' - 2[z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}]R'(2\theta)}{R(2\theta)[z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}]} \, d\theta = \\ = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[R^2(2\theta) - (z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)})Vz^2 + R^2(2\theta)]R'(2\theta)}{R(2\theta)[z + \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}]Vz^2 + R^2(2\theta)} \sin 2\theta \, d\theta.$$

После простых преобразований это выражение приводится к виду:

$$I_1 = \frac{2z(r_1 r_2)^{1/2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\theta}{R^2(2\theta) \sqrt{z^2 + R^2(2\theta)}} \, d\theta.$$



Заменяя  $R^2(2\theta)$  его выражением и переходя к прежним обозначениям  $k$  и  $p$ , будем иметь:

$$I_1 = \frac{zkp^2}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\theta d\theta}{(1-p^2 \cos^2 \theta) \sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}}.$$

Введем вместо  $\theta$  новую переменную  $\frac{\pi}{2} - \theta$  и заменим  $\sin 2\theta$  через  $2 \sin \theta \cos \theta$ ; тогда имеем:

$$I_1 = \frac{zkp^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta}{(1-p^2 \sin^2 \theta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{zk}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta}{\left(\frac{1}{p^2} - \sin^2 \theta\right) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Чтобы привести этот интеграл к эллиптическим, сделаем следующие преобразования, прибавив и вычтя в числителе  $\frac{1}{p^2}$  и  $\frac{1}{p^4}$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{zk}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} + \sin^2 \theta - \sin^4 \theta + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^4}\right)}{\left(\frac{1}{p^2} - \sin^2 \theta\right)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{z}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{k^2}{p^2} \left(\frac{1}{p^2} - \sin^2 \theta\right) - k^2 + \left(\frac{1}{p^2} + \sin^2 \theta\right) k^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2}{p^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{p^2} - \sin^2 \theta\right)} \right\} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Далее, приводя к общему знаменателю и группируя соответствующие члены, получим:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{z}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ k^2 \sin^2 \theta - \frac{k^2(p^2-1)}{p^2} \left[ 1 - \frac{1}{1-p^2 \sin^2 \theta} \right] \right\} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{z}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} - \frac{z}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} - \\ &\quad - \frac{zk}{\pi} \frac{(p^2-1)}{p^2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-p^2 \sin^2 \theta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \right]; \end{aligned}$$

или, заменяя эллиптические интегралы первого, второго и третьего рядов через  $K(k)$ ,  $E(k)$  и  $\Pi(k, p)$ , получим окончательно:

$$I_1 = \frac{kz}{\pi} \left[ \frac{K(k) - E(k)}{k^2} + \frac{1-p^2}{p^2} (K(k) - \Pi(k, p)) \right], \quad (62)$$

при этом  $k$  и  $p$  — параметры эллиптических интегралов, определяемые формулами (58).

Общее выражение для функций  $m_0(z)$  получим, сопоставляя формулы (59), (60) и (62), заменяя в них  $k$  и  $p$  по формулам (58):

$$\begin{aligned} m_0(z) = & \frac{2\pi w_1 w_2}{l_1 l_2} \left\{ z^2 \sqrt{z^2 + (r_1 + r_2)^2} [K(k) - E(k)] + \right. \\ & + \frac{z^2 (r_1 + r_2)^2}{\sqrt{z^2 + (r_1 + r_2)^2}} [K(k) - \Pi(k, p)] + \\ & \left. + \frac{\pi r_1 r_2}{3} \left[ K(k) - \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) [K(k) - E(k)] \right] \right\}. \quad (63) \end{aligned}$$

## § 12. Сила взаимодействия $f$ между двумя соленоидами

Сила притяжения  $f$  между двумя винтообразными катушками или соленоидами определяется, как мы видели, по формуле:

$$f = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial z} = I_1 I_2 \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial m_0}{\partial z_i} + \frac{\partial m_x}{\partial z_i} + \frac{\partial m_y}{\partial z_i} \right),$$

где знак  $i$  обозначает, что в выражениях, стоящих в скобках, необходимо подставить вместо  $z$  и  $\theta$  четыре их значения, т. е.  $z = z_1 - z_2 \dots$  и т. д. и составить алгебраическую сумму, аналогичную выражению (25).

Обозначим производную от главного члена  $m_0(z)$  через  $F_i$  а остальные две через  $\delta F_{z_i}$  и  $\delta F_{\theta_i}$ ; тогда

$$f = I_1 I_2 \sum (F_i + \delta F_{z_i} + \delta F_{\theta_i})$$

и найдем  $F_i$ .

Из уравнений (56) и (57) имеем:

$$F_i = \frac{\partial m_0}{\partial z} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{p_1 p_2} \int_0^z U_1(x) dx = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{p_1 p_2} I_1,$$

или, заменяя  $p_1$  и  $p_2$  значениями  $w_1$  и  $w_2$ , и также согласно уравнениям (62) и (58), получим:

$$\begin{aligned} F_i = & \frac{2\pi w_1 w_2 z}{l_1 l_2} \left\{ \sqrt{z^2 + (r_1 + r_2)^2} [K(k) - E(k)] + \right. \\ & \left. + \frac{(r_1 - r_2)^2}{\sqrt{z^2 + (r_1 + r_2)^2}} [K(k) - \Pi(k, p)] \right\} = \frac{2\pi w_1 w_2}{l_1 l_2} (A_i - B_i). \quad (64) \end{aligned}$$

Величина

$$F = \sum F_i = F_1(z_4 - z_2) - F_2(z_4 - z_1) + F_3(z_3 - z_1) - F_4(z_3 - z_2) \quad (65)$$

выражает силу взаимодействия между слоистыми катушками, когда по ним протекает ток, равный абсолютной электромагнитной единице.

При этом отдельные слагаемые  $F_1, F_2, F_3, F_4$  можно трактовать как силы взаимодействия между верхними и нижними плоскостями соленоидов. Так,  $F_1(z_4 - z_2)$  есть сила взаимодействия между верхними плоскостями соленоидов (рис. 26);  $F_2(z_4 - z_1)$  — сила взаимодействия между верхней плоскостью неподвижного и нижней плоскостью подвижного;  $F_3(z_3 - z_1)$  — между нижними плоскостями и  $F_4(z_3 - z_2)$  — между нижней плоскостью неподвижного и верхней подвижного.

Знак минус у  $F_2$  и  $F_4$  показывает, что направление сил  $F_2$  и  $F_4$  противоположно направлению сил  $F_3$  и  $F_1$ .

В рассматриваемых токовых весах катушки расположены так, что средняя плоскость подвижной катушки совпадает с нижней плоскостью неподвижной, как показано на рис. 14. В этом случае  $z_3 - z_1 = z_3 - z_2$  и, следовательно,  $F_3(z_3 - z_1) = F_4(z_3 - z_2)$ ; направление этих сил  $F_3$  и  $F_4$  одинаково с направлением силы  $F_1$ , и поэтому формула (65) для  $F$  напишется в следующем виде:

$$F = 2F_3(z_3 - z_2) + F_1(z_4 - z_2) - F_2(z_4 - z_1).$$

Если обозначить длину неподвижного соленоида через  $\frac{l_1}{2}$ , а длину подвижного через  $l_2$ , то, как видно из рисунка,

$$z_3 - z_2 = \frac{l_2}{2}; \quad z_4 - z_2 = \frac{l_1 - l_2}{2}; \quad z_4 - z_1 = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

и, следовательно,

$$F = 2F_3\left(\frac{l_2}{2}\right) + F_1\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right) - F_2\left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right). \quad (66)$$

Величина  $F$  называется постоянной токовых весов.

### § 13. Поправочные члены $\delta F_x$ и $\delta F_z$

Для нахождения поправочного члена  $\delta F_x$ , выражающего влияние осевой составляющей плотности тока винтовой катушки, воспользуемся уравнением (41), которое дает:

$$\delta F_x = \frac{dm_x(k)}{dz} = \frac{1}{V r_1 r_2} \int_0^z U_0(k) dx.$$

Подставляя вместо  $U_0(k)$  его значение по формуле (32), будем иметь:

$$dF_z = \frac{1}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} \int_0^z k K(k) dx.$$

Так как подобное выражение нельзя проинтегрировать в простейших функциях, представим эллиптический интеграл  $K(k)$  в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right)^2 k^4 + \frac{1}{2^6} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 k^6 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

На основании известных соотношений для гамма-функций:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1),$$

ряд для  $K(k)$  можно представить в следующем виде:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(n+1)} k^{2n}.$$

Поэтому выражение для  $\delta F_z$  примет вид

$$\delta F_z = \frac{1}{2 \sqrt{r_1 r_2}} \int_0^z k dx + \frac{1}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(n+1)} \int_0^z k^{2n+1} dx,$$

или, после подстановки вместо  $k$  его значения из уравнения (52):

$$\delta F_z = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (r_1 + r_2)^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(n+1)} (4r_1 r_2)^{2n} \int_0^z \frac{dx}{[x^2 + (r_1 + r_2)^2]^{n + \frac{1}{2}}}.$$

Первый из этих интегралов является табличным, второй же для сведения к табличному требует некоторых преобразований, заключающихся в замене переменной интегрирования. Введем новую переменную  $\varphi$ , определяемую следующим соотношением:

$$\sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (r_1 + r_2)^2}},$$

откуда

$$x = (r_1 + r_2) \operatorname{tg} \varphi, \quad dx = (r_1 + r_2) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$x^2 + (r_1 + r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \sec^2 \varphi.$$

Следовательно,

$$dF_z = \int_0^{\varphi_z} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^n(n + \frac{1}{2})}{\Gamma^n(n + 1)} p^{2n} \int_0^{\varphi_z} \cos^{2n-1} \varphi d\varphi, \quad (67)$$

где

$$p^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}; \quad \varphi_z = \arctg \frac{z}{r_1 + r_2}.$$

Первый интеграл, как указано выше, является табличным, и значение его следующее:

$$\int_0^{\varphi_z} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi_z}{1 - \sin \varphi_z}. \quad (68)$$

Второй преобразуем таким образом:

$$\int_0^{\varphi_z} \cos^{2n-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\sin \varphi_z} \cos^{2n-2} \varphi d \sin \varphi = \int_0^{\sin \varphi_z} (1 - \sin^2 \varphi)^{n-1} d \sin \varphi.$$

В теории гипергеометрических функций доказывается следующее соотношение:

$$zF\left(-n; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = \int_0^z (1 - z^2)^n dz,$$

где  $F\left(-n; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right)$  — гипергеометрический ряд.

Следовательно, наш интеграл можно написать в виде

$$\int_0^{\sin \varphi_z} (1 - \sin^2 \varphi)^{n-1} d \sin \varphi = \sin \varphi_z F\left(1 - n; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 \varphi_z\right). \quad (69)$$

Подставляя значение интегралов (68) и (69) в уравнении (67), будем иметь:

$$\delta F_z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi_z}{1 - \sin \varphi_z} + \sin \varphi_z S(p^2, \sin \varphi_z), \quad (70)$$

где  $S$  — функция от  $p^2$  и  $\sin^2 \varphi_z$ , имеющая вид

$$S(p^2, \sin \varphi_z) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^n(n + \frac{1}{2})}{\Gamma^n(n + 1)} p^{2n} F\left(1 - n; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 \varphi_z\right).$$

Уравнение (70) показывает, что поправочный член  $\delta F_z$  является функцией двух аргументов  $\varphi_z$  и  $p^2$ , меняя которые будем изменять и величину  $\delta F_z$ . Однако изменение слагаемых в правой части уравнения (70) будет происходить различно. В то время как первое слагаемое, логарифм, при изменении

$\varphi_z$  от нуля до  $\frac{\pi}{2}$ , будет меняться от нуля до бесконечности, второе слагаемое  $\sin \varphi_z S(p^2, \sin p^2)$  изменяется от нуля до некоторой конечной величины.

Для того чтобы найти предел, к которому стремится это слагаемое при  $\varphi_z = \frac{\pi}{2}$ , обратимся к первоначальному выражению для  $dF_z$  (67). Заменяя в нем верхний предел интегрирования во втором интеграле  $\frac{\pi}{2}$ , по формулам теории определенных интегралов получим:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma^2(n + \frac{1}{2})}.$$

Следовательно, второе слагаемое в выражении  $\delta F_z$  при  $\varphi_z = \frac{\pi}{2}$  будет иметь вид

$$S(p^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n} \Gamma^2(n + 1)} p^{2n}.$$

Заменяем гамма-функции их значениями:

$$S(p^2, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2^{2n} n! n!} p^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)}{2^{2n} n!} p^{2n}.$$

Предел, к которому стремится сумма ряда в правой части, равен

$$\ln \frac{1}{1 + \sqrt{1-p^2}},$$

так как этот логарифм разлагается в ряд такого же вида, как и  $S(p^2, 1)$ .

Следовательно, наибольшим значением, которое может принимать второе слагаемое при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , будет:

$$S_{\max}(p^2, \sin^2 \varphi_z) = \ln \frac{2}{1 + \sqrt{1-p^2}}.$$

Так как эта величина, при тех значениях радиусов соленоидов и расстояний между ними, которые применяются в практике, мала по сравнению с первым числом, то можно без большой погрешности принять ее за величину второго слагаемого, и тогда

$$\delta F_z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi_z}{1 - \sin \varphi_z} + \sin \varphi_z \ln \frac{2}{1 + \sqrt{1-p^2}}.$$

Заменяя  $\varphi_z$  и  $p$  их значениями, получим для величины аксиального члена  $\delta F_z$  следующее выражение:

$$\delta F_z = \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + (r_1 + r_2)^2}}{r_1 + r_2} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r_1 + r_2)^2}} \ln \frac{r_1 + r_2}{r_n}, \quad (71)$$

где  $r_n$  — наибольшее значение одного из радиусов  $r_1$  и  $r_2$ .

Формула для поправочного члена  $\delta F_z$  представляет собою поправку на незамкнутость винтовых проводников соленоида и выражается через производную от функции, даваемой уравнением (44). Вывод ее требует больших вычислительных операций и поэтому мы здесь его не приводим, а даем эту формулу в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \delta F_z = & \frac{\pi z}{6 \sqrt{z^2 + (r_1 + r_2)^2}} \left[ \frac{2 - k^2}{1 - k^2} E(k) - 2K(k) \right] + \\ & + \frac{\pi z}{4 \sqrt{r_1 r_2}} \left( \cos \frac{\alpha}{2} \arcsin \left( k \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{k(2 - k^2)}{2(1 - k^2)} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \right. \\ & \left. + \sin \frac{\alpha}{2} \ln \left[ k \sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \right). \quad (71a) \end{aligned}$$

## Глава II

### МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ДИАМЕТРА И ДЛИНЫ СОЛЕНОИДОВ И РАСЧЕТ ПОСТОЯННОЙ $K$

#### § 1. Измерение диаметра

Для измерения диаметра соленоидов был сконструирован специальный прибор по проекту старшего научного сотрудника М. Л. Бржезинского. Прибор был изготовлен заводом „Эталон“.

Прибор представляет собой массивную станину высотой 1,5 м. В проеме станины находится круглый стол 1 (рис. 27), который имеет вертикальное перемещение при помощи ходового винта 2 и маховика 3. Кроме того, стол имеет поперечное перемещение при помощи винта 4.

Сверху на опорные поверхности станины наложена рама 5, на которой установлены: с одной стороны пиноль 6 с микрометрической подачей, а с другой — оптиметр 7. На оптиметре и пинноли находятся измерительные наконечники 8 и 9 с плоскими поверхностями. При помощи регулировочных винтов 10 и 11 устанавливается соосность и параллельность измерительных поверхностей наконечников.

Метод измерения на данном приборе относительный, измерения производятся путем сравнения с образцовой концевой мерой, равной номинальному диаметру катушки.

Концевая мера *I* (рис. 28) помещается между измерительными наконечниками на специальной подвеске *2*, у которой предусмотрена возможность установки концевой меры в положение, перпендикулярное плоскости наконечников.

При помощи микрометрической подачи *3* винюли шкала, находящаяся в оптиметре, устанавливается в нулевое положение. Шкала оптиметра построена на принципе оптического рычага. Цена деления шкалы равна  $0,001 \text{ мм}$  и вся длина шкалы  $\pm 100 \text{ мк}$ .

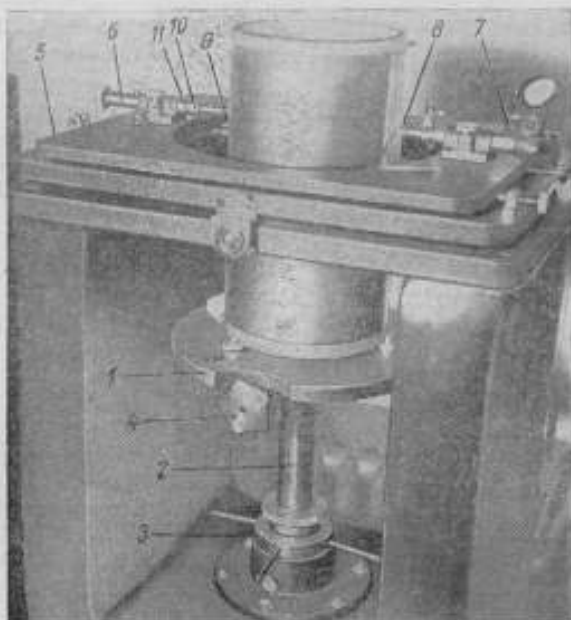


Рис. 27. Прибор для измерения диаметра цилиндров

После установки нулевого положения подвеска с концевой мерой снимается с прибора и стол *4* с установленной на нем катушкой *5* (рис. 28) поднимается до тех пор, пока катушка не установится между измерительными наконечниками, где раньше находилась концевая мера. Передвижением винта *3* с одновременным наблюдением по шкале находится максимальное отклонение, которое будет соответствовать диаметру катушки в данном месте. Одновременно при помощи винта, за счет наклона рамы в горизонтальной плоскости, ось катушки устанавливается в положение, перпендикулярное линии измерительных наконечников.



Полученное при такой установке отклонение от нулевого положения шкалы оптиметра, в сумме (алгебраической) с действительным размером концевых мер, определяет значение диаметра катушки в данной точке, а отклонения от правильной геометрической формы выявляются в результате измерения по всей длине цилиндра и двум взаимно перпендикулярным диаметрам.

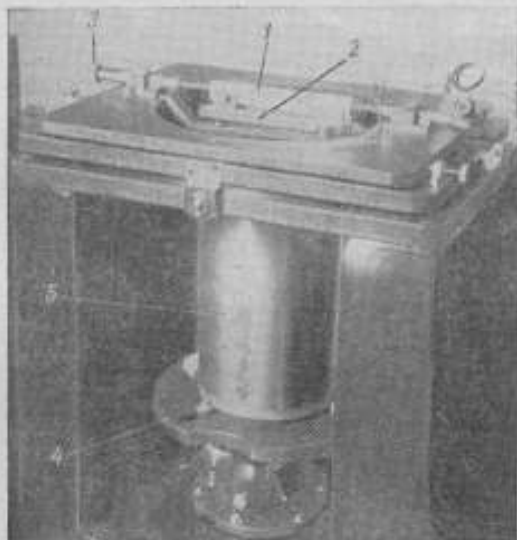


Рис. 28. Установка концевых мер на приборе для измерения диаметра цилиндров

## § 2. Измерение длины и шага обмотки

Измерение шага обмотки и ее длины производилось путем сличения с рабочим эталоном, дециметром Д-36, на линейной измерительной машине СИП.

Катушка устанавливалась на специально изготовленной подставке 1, скрепленной со столом измерительной машины (рис. 29). При помощи юстировочных винтов 2 подставка катушки устанавливалась так, чтобы ее образующая была не только строго горизонтальна, но и параллельна оси ходового винта машины. Правильность положения катушки проверялась при помощи измерительного микроскопа 3 машины и специальной накладке 4, помещавшейся на обмотке катушки. Накладка, имеющая Т-образную форму, двумя шариковыми опорами устанавливалась между витками катушки. Хвостовая часть накладки в это время свободно ложилась нижней опорной плоскостью на обмотку катушки по ее образующей.

Для лучшей устойчивости накладки планка с опорными винтами изогнута по окружности того же радиуса, что и катушка. В верхней части накладки, на полированной поверхности, посредине между опорными витками нанесены два взаимно перпендикулярных штриха. Установка накладки на катушке производилась при помощи накладного уровня. При правильной установке катушки на всем ее протяжении штрихи накладки должны быть видны в микроскоп одинаково четко и резко, а продольный штрих должен совпадать с горизонтальной нитью сетки микроскопа. Дециметр Д-36 б устанавливался на столе машины так, чтобы его ось находилась в одной вертикальной плоскости с осью катушки.

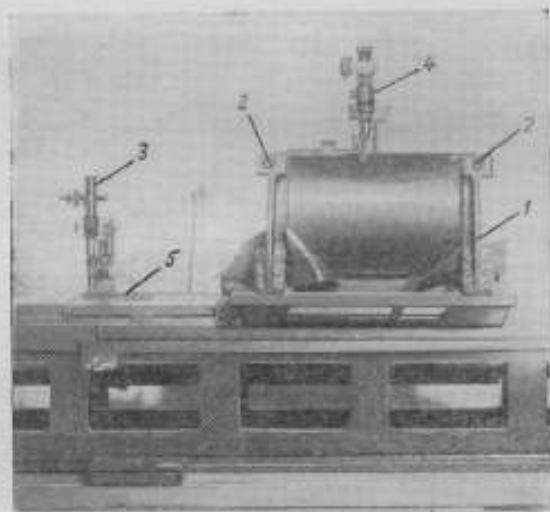


Рис. 29. Прибор для измерения длины обмотки

Измерение шага обмотки производилось по образующей, проходящей вблизи отводов катушки, причем определялось расстояние между витками со спаями соответствующих витков. Во время измерений опоры накладки устанавливались по витку первого спая; биссектор окулярного микрометра левого микроскопа машины наводился на штрих накладки, и производился соответствующий отсчет. По правому микроскопу производится отсчет, соответствующий нулевому штриху дециметра Д-36. После этого накладка устанавливалась по витку второго спая; стол машины перемещался вправо до тех пор, пока в середине поля зрения левого микроскопа не появлялся штрих накладки, и по барабану окулярного микрометра производился отсчет. Наводя биссектор правого микроскопа на соответствующий штрих шкалы дециметра,

производили отсчет по правому микроскопу. Цена деления барабанов микрометров микроскопов машины равна 1 *мк*. Разности отсчетов по микроскопам дают разность длин измеренного участка образующей катушки и соответствующего интервала дециметра.

### § 3. Результаты измерений

Результаты измерений приведены в табл. 8—10, в которых в первом столбце помещены номера точек вдоль образующих цилиндра, через 2 см, а в остальных—значения диаметров по разным образующим.

Шаг обмотки непосредственно в расчетные формулы не входит и поэтому, казалось бы, в измерении его нет необходимости. Однако при выводе формул (64) и (65) предполагалось, что шаг есть величина постоянная на всем протяжении соленоида, вследствие чего необходимым условием применимости указанных формул является постоянство шага обмотки, которое и должно быть экспериментально проверено.

Результаты измерений, помещенные в табл. 11, показывают вполне достаточное для практики постоянство шага обмотки.

Таблица 8

Результаты измерений диаметра неподвижного соленоида

Номера точек	Значения диаметра в мм при 20 °С					
	Образующие					
	I	II	III	IV	V	VI
1	271,631 <sub>1</sub>	271,611 <sub>6</sub>	271,625 <sub>5</sub>	271,633 <sub>0</sub>	271,621 <sub>0</sub>	271,609 <sub>5</sub>
2	271,620 <sub>4</sub>	271,605 <sub>5</sub>	271,620 <sub>1</sub>	271,624 <sub>0</sub>	271,612 <sub>4</sub>	271,602 <sub>1</sub>
3	271,616 <sub>5</sub>	271,600 <sub>5</sub>	271,615 <sub>1</sub>	271,621 <sub>4</sub>	271,606 <sub>0</sub>	271,600 <sub>0</sub>
4	271,615 <sub>5</sub>	271,602 <sub>5</sub>	271,612 <sub>2</sub>	271,617 <sub>3</sub>	271,608 <sub>4</sub>	271,601 <sub>0</sub>
5	271,614 <sub>4</sub>	271,604 <sub>5</sub>	271,613 <sub>3</sub>	271,617 <sub>4</sub>	271,611 <sub>1</sub>	271,605 <sub>5</sub>
6	271,612 <sub>7</sub>	271,603 <sub>1</sub>	271,613 <sub>3</sub>	271,615 <sub>7</sub>	271,610 <sub>6</sub>	271,603 <sub>1</sub>
7	271,613 <sub>3</sub>	271,604 <sub>2</sub>	271,613 <sub>0</sub>	271,618 <sub>4</sub>	271,609 <sub>5</sub>	271,602 <sub>8</sub>
8	271,611 <sub>5</sub>	271,603 <sub>5</sub>	271,610 <sub>7</sub>	271,612 <sub>5</sub>	271,603 <sub>0</sub>	271,605 <sub>0</sub>
9	271,606 <sub>1</sub>	271,602 <sub>1</sub>	271,614 <sub>4</sub>	271,607 <sub>5</sub>	271,601 <sub>7</sub>	271,599 <sub>1</sub>
10	271,603 <sub>5</sub>	271,597 <sub>7</sub>	271,599 <sub>7</sub>	271,603 <sub>0</sub>	271,598 <sub>1</sub>	271,597 <sub>4</sub>
11	271,601 <sub>3</sub>	271,595 <sub>1</sub>	271,596 <sub>0</sub>	271,603 <sub>0</sub>	271,594 <sub>5</sub>	271,594 <sub>2</sub>
12	271,602 <sub>1</sub>	271,596 <sub>6</sub>	271,598 <sub>2</sub>	271,603 <sub>0</sub>	271,599 <sub>1</sub>	271,599 <sub>3</sub>
13	271,595 <sub>5</sub>	271,590 <sub>0</sub>	271,591 <sub>5</sub>	271,594 <sub>2</sub>	271,593 <sub>0</sub>	271,595 <sub>7</sub>
14	271,596 <sub>0</sub>	271,591 <sub>5</sub>	271,593 <sub>3</sub>	271,596 <sub>5</sub>	271,595 <sub>5</sub>	271,594 <sub>2</sub>
15	271,587 <sub>7</sub>	271,587 <sub>5</sub>	271,583 <sub>5</sub>	271,583 <sub>0</sub>	271,585 <sub>1</sub>	271,589 <sub>1</sub>
16	271,584 <sub>2</sub>	271,586 <sub>5</sub>	271,583 <sub>0</sub>	271,584 <sub>5</sub>	271,588 <sub>5</sub>	271,590 <sub>4</sub>
17	271,585 <sub>5</sub>	271,588 <sub>5</sub>	271,583 <sub>0</sub>	271,583 <sub>0</sub>	271,588 <sub>1</sub>	271,590 <sub>5</sub>
18	271,587 <sub>1</sub>	271,583 <sub>0</sub>	271,585 <sub>0</sub>	271,588 <sub>3</sub>	271,588 <sub>0</sub>	271,594 <sub>5</sub>
Среднее	271,604 <sub>7</sub>	271,598 <sub>1</sub>	271,603 <sub>0</sub>	271,606 <sub>1</sub>	271,600 <sub>0</sub>	271,598 <sub>5</sub>

Среднее  $2r = 271,601_5$

Таблица 9

## Результаты измерений диаметра подвижного соленоида № 1

Номера точек	Значения диаметра в мм при 20 °С					
	Образующие					
	I	II	III	IV	V	VI
1	215,107 <sub>4</sub>	215,106 <sub>2</sub>	215,107 <sub>4</sub>	215,106 <sub>8</sub>	215,106 <sub>0</sub>	215,105 <sub>8</sub>
2	215,112 <sub>7</sub>	215,110 <sub>8</sub>	215,110 <sub>8</sub>	215,109 <sub>4</sub>	215,108 <sub>4</sub>	215,107 <sub>8</sub>
3	215,115 <sub>4</sub>	215,112 <sub>0</sub>	215,111 <sub>8</sub>	215,109 <sub>1</sub>	215,108 <sub>8</sub>	215,106 <sub>8</sub>
4	215,116 <sub>0</sub>	215,112 <sub>4</sub>	215,113 <sub>4</sub>	215,110 <sub>0</sub>	215,109 <sub>3</sub>	215,109 <sub>1</sub>
5	215,114 <sub>4</sub>	215,112 <sub>8</sub>	215,115 <sub>4</sub>	215,114 <sub>2</sub>	215,112 <sub>0</sub>	215,114 <sub>1</sub>
Среднее	215,113 <sub>3</sub>	215,110 <sub>3</sub>	215,111 <sub>7</sub>	215,110 <sub>1</sub>	215,109 <sub>1</sub>	215,108 <sub>8</sub>

Номера точек	Значения диаметра в мм при 20 °С					
	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	215,104 <sub>4</sub>	215,105 <sub>0</sub>	215,106 <sub>0</sub>	215,110 <sub>1</sub>	215,108 <sub>8</sub>	215,105 <sub>8</sub>
2	215,105 <sub>1</sub>	215,107 <sub>0</sub>	215,107 <sub>4</sub>	215,112 <sub>2</sub>	215,112 <sub>0</sub>	215,110 <sub>4</sub>
3	215,104 <sub>0</sub>	215,104 <sub>4</sub>	215,106 <sub>2</sub>	215,114 <sub>2</sub>	215,115 <sub>4</sub>	215,113 <sub>2</sub>
4	215,103 <sub>4</sub>	215,104 <sub>8</sub>	215,106 <sub>0</sub>	215,114 <sub>0</sub>	215,116 <sub>2</sub>	215,115 <sub>2</sub>
5	215,107 <sub>8</sub>	215,106 <sub>2</sub>	215,105 <sub>2</sub>	215,110 <sub>8</sub>	215,111 <sub>8</sub>	215,110 <sub>4</sub>
Среднее	215,105 <sub>2</sub>	215,105 <sub>0</sub>	215,106 <sub>7</sub>	215,112 <sub>0</sub>	215,113 <sub>0</sub>	215,111 <sub>2</sub>

Среднее  $2r = 215,109_2$ 

Таблица 10

## Результаты измерений диаметра подвижного соленоида № 2

Номера точек	Значения диаметра в мм при 20 °С					
	Образующие					
	I	II	III	IV	V	VI
1	187,061 <sub>7</sub>	187,060 <sub>4</sub>	187,060 <sub>8</sub>	187,060 <sub>7</sub>	187,059 <sub>4</sub>	187,056 <sub>0</sub>
2	187,063 <sub>3</sub>	187,062 <sub>2</sub>	187,062 <sub>7</sub>	187,062 <sub>2</sub>	187,060 <sub>4</sub>	187,057 <sub>1</sub>
3	187,061 <sub>7</sub>	187,060 <sub>7</sub>	187,060 <sub>7</sub>	187,059 <sub>7</sub>	187,058 <sub>8</sub>	187,056 <sub>6</sub>
4	187,055 <sub>1</sub>	187,054 <sub>4</sub>	187,057 <sub>7</sub>	187,057 <sub>1</sub>	187,055 <sub>8</sub>	187,054 <sub>2</sub>
5	187,054 <sub>7</sub>	187,053 <sub>7</sub>	187,051 <sub>0</sub>	187,052 <sub>1</sub>	187,049 <sub>7</sub>	187,050 <sub>7</sub>
Среднее	187,059 <sub>4</sub>	187,058 <sub>2</sub>	187,058 <sub>0</sub>	187,058 <sub>4</sub>	187,056 <sub>8</sub>	187,055 <sub>0</sub>

Номера точек	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	187,055 <sub>5</sub>	187,055 <sub>7</sub>	187,057 <sub>7</sub>	187,060 <sub>4</sub>	187,062 <sub>1</sub>	187,063 <sub>3</sub>
2	187,056 <sub>5</sub>	187,057 <sub>0</sub>	187,058 <sub>0</sub>	187,061 <sub>1</sub>	187,063 <sub>1</sub>	187,064 <sub>3</sub>
3	187,055 <sub>7</sub>	187,055 <sub>7</sub>	187,057 <sub>0</sub>	187,060 <sub>4</sub>	187,061 <sub>7</sub>	187,063 <sub>1</sub>
4	187,053 <sub>7</sub>	187,054 <sub>9</sub>	187,056 <sub>4</sub>	187,057 <sub>5</sub>	187,058 <sub>8</sub>	187,060 <sub>7</sub>
5	187,051 <sub>7</sub>	187,052 <sub>3</sub>	187,054 <sub>7</sub>	187,054 <sub>7</sub>	187,055 <sub>2</sub>	187,056 <sub>7</sub>
Среднее	187,054 <sub>9</sub>	187,055 <sub>1</sub>	187,057 <sub>1</sub>	187,058 <sub>3</sub>	187,060 <sub>2</sub>	187,061 <sub>9</sub>

Среднее  $2r = 187,057_3$ 

Таблица 11

## Результаты измерений длины и шага обмотки

Наименование соленоида	Длина, мм	Средний шаг обмотки, мм	Максимальное значение шага	Минимальное значение шага	Число витков
Неподвижный . . . . .	399,842	0,9966	0,9998	0,9910	400
Подвижный № 1 . . . . .	46,273	0,7978	—	—	—
Подвижный № 2 . . . . .	46,266	0,7977	—	—	58

## § 4. Теоретические расчеты влияния неравномерности диаметра соленоида по его длине

При вычислении постоянной взаимодействия токовых весов за величину диаметра соленоида принимается его среднее значение, а среднеквадратичное отклонение от среднего значения — за величину погрешности определения диаметра, обуславливающую систематическую погрешность определения силы тока. Однако заранее можно утверждать, что действительная погрешность должна быть значительно меньше погрешности, вычисленной по обычной формуле:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{f'(r)}{f(r)} \Delta r,$$

где  $f(r)$  — некоторая функция, зависящая от радиуса соленоида, и  $\Delta r$  — погрешность определения диаметра.

Действительно, взаимодействие между подвижным и неподвижным соленоидами представляет собою арифметическую сумму взаимодействий каждого отдельного витка неподвижного соленоида с подвижным.

Витки с большим диаметром будут давать меньшую силу, витки с меньшим диаметром — большую, и сумма их экви-

валентна сумме сил, создаваемых витками одинакового диаметра, величина которого является некоторым средним значением. Если бы взаимодействие зависело только от диаметра, то среднеарифметическое значение диаметра всех отдельных значений и было бы диаметром такого эквивалентного соленоида и, следовательно, погрешность определения его была бы равна лишь погрешности непосредственных измерений диаметров отдельных витков, которая на один-два порядка меньше отклонений, вызванных неправильностью изготовления.

Однако ввиду того, что сила взаимодействия зависит от расстояния каждого витка неподвижного соленоида до подвижного, эквивалентный диаметр не будет средним арифметическим и должен несколько отличаться от него. Для выявления степени такого отклонения были произведены непосредственные вычисления силы взаимодействия между подвижным соленоидом, принимаемым за четыре разностоящих витка, и отдельными витками неподвижного соленоида, считая каждые пять витков эквивалентными линейному витку, расположенному в средней части этих витков. Такая замена, значительно сокращая вычисления, может сказываться лишь на абсолютной величине силы взаимодействия, но не на величине определяемой поправки.

На первой стадии вычислений неподвижный соленоид, состоящий из 400 витков, был заменен эквивалентным соленоидом такой же длины, но имеющим 80 витков одинакового диаметра, а подвижный соленоид, состоящий из 56 витков, заменен эквивалентным соленоидом из четырех витков также одинакового диаметра.

Взаимодействие вычислено между всеми витками неподвижного соленоида и каждого в отдельности из четырех витков подвижного.

Всего, таким образом, определено 320 значений силы взаимодействия, каждая из которых вычислялась по формуле:

$$f_i = \frac{\pi z_i}{V r_1 r_2} + \frac{k}{1-k^2} [2(1-k^2)K(k) - (2-k^2)E(k)], \quad (72)$$

где

$$k^2 = \frac{4r_1 r_2}{z_i^2 + (r_1 + r_2)^2};$$

$r_1$  и  $r_2$  — радиусы неподвижного и подвижного соленоидов;

$z_i$  — расстояние между витками;

$K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода по модулю  $k$ .

За  $r_1$  и  $r_2$  принимались средние значения диаметров.

Результаты этих вычислений представлены в табл. 12.

Таблица 12

Силы взаимодействия  $f_i$  между витками соленоидов при различных расстояниях  $z_i$  между ними

$$r_1 = 13,541 \text{ см}; \quad r_2 = 10,009 \text{ см}$$

$z_i$	$f$	$z_i$	$f$	$z_i$	$f$
0,5	0,798	9,5	3,422	18,5	1,618
1,0	1,539	10,0	3,308	19,0	1,548
1,5	2,191	10,5	3,197	19,5	1,476
2,0	2,735	11,0	3,083	20,0	1,411
2,5	3,168	11,5	2,968	20,5	1,346
3,0	3,421	12,0	2,855	21,0	1,285
3,5	3,714	12,5	2,743	21,5	1,227
4,0	3,876	13,0	2,684	22,0	1,171
4,5	3,972	13,5	2,526	—	—
5,0	4,019	14,0	2,421	—	—
5,5	4,023	14,5	2,321	—	—
6,0	4,010	15,0	2,221	—	—
6,5	3,965	15,5	2,126	—	—
7,0	3,901	16,0	2,033	—	—
7,5	3,824	16,5	1,948	—	—
8,0	3,732	17,0	1,858	—	—
8,5	3,635	17,5	1,775	—	—
9,0	3,531	18,0	1,696	—	—

Во второй стадии за диаметры витков эквивалентных соленоидов принимались те, которые соответствовали реальному соленоиду, и вычислялось изменение каждой силы  $f_i$  в зависимости от изменения радиуса  $r_{1i}$ .

Эти вычисления производились по формуле:

$$\Delta f_i = \pm f_i \frac{r_1^2 - r_2^2}{2z_i^2} \frac{\Delta r_{1i}}{r_1}, \quad (73)$$

которая получается простым дифференцированием формулы (72).

В формуле (73)  $\Delta r_{1i}$  представляет собой отклонение действительного радиуса от его среднего значения для всех витков, взятое с соответствующим знаком. Как видим, изменение силы взаимодействия, обусловленное изменением диаметра неподвижного цилиндра, прямо пропорционально силе взаимодействия и обратно пропорционально квадрату расстояния между витками. Следовательно, наибольшую погрешность в определении  $\Delta f_i$  вносят витки, находящиеся на близком расстоянии от подвижного соленоида, и одновременно вызывающие большую силу взаимодействия, т. е. те, для которых  $\frac{f_i}{z_i}$  имеет наибольшее значение.

Общее отклонение силы взаимодействия  $\Delta F_1$ , т. е. разность между действительной силой и силой, вычисленной по среднему диаметру, очевидно, будет суммой всех  $\Delta f_i$ .

Результаты этих вычислений представлены в табл. 13.

Таблица 13

Изменения силы взаимодействия  $f_i$  при отклонении радиуса неподвижного витка от среднего значения при различных расстояниях  $z_i$

Первая половина соленоида			Вторая половина соленоида		
$z_i$	$\Delta r_{1i}$	$\Delta f_i$	$z_i$	$\Delta r_{2i}$	$\Delta f_i$
1,0	2,0	0,0009	1,0	0,3	0,00009
1,5	2,3	0,0008	1,5	-0,5	-0,0001
2,0	2,5	0,0005	2,0	-1,0	-0,0002
2,5	2,8	0,0004	2,5	-1,5	-0,0002
3,0	3,0	0,0004	3,0	-2,0	-0,0002
3,5	3,5	0,0003	3,5	-2,5	-0,0002
4,0	3,8	0,0003	4,0	-3,3	-0,0002
4,5	3,5	0,0002	4,5	-3,8	-0,0002
5,0	3,3	0,0002	5,0	-4,0	-0,0002
5,5	3,0	0,0001	5,5	-4,5	-0,0002
6,0	2,8	0,00009	6,0	-5,0	-0,0002
6,5	3,0	0,00009	6,5	-5,0	-0,0002
7,0	3,3	0,00008	7,0	-5,0	-0,0001
7,5	3,5	0,00007	7,5	-4,8	-0,0001
8,0	3,5	0,00006	8,0	-4,5	-0,00009
8,5	4,3	0,00007	8,5	-5,7	-0,00009
9,0	4,5	0,00006	9,0	-7,0	-0,0001
9,5	5,0	0,00006	9,5	-8,0	-0,0001
10,0	5,5	0,00006	10,0	-9,2	-0,0001
10,5	4,8	0,00004	10,5	-9,0	-0,00009
11,0	4,3	0,00003	11,0	-9,0	-0,00008
11,5	3,8	0,00002	11,5	-8,8	-0,00007
12,0	3,0	0,00002	12,0	-8,5	-0,00006
12,5	3,8	0,00002	12,5	-8,3	-0,00005
13,0	4,5	0,00002	13,0	-8,0	-0,00004
13,5	5,3	0,00002	13,5	-7,8	-0,00004
14,0	6,0	0,00002	14,0	-7,5	-0,00003
14,5	6,8	0,00002	14,5	-7,0	-0,00003
15,0	7,5	0,00002	15,0	-7,0	-0,00002
16	9,0	0,00002	16,0	-6,8	-0,00002
16,5	11,0	0,00002	16,5	-6,5	-0,00002
17,0	14,3	0,00003	17,0	-7,5	-0,00002
17,5	17	0,00003	17,5	-8,0	-0,00002
18,0	20	0,00003	18,0	-9,0	-0,00002

Таблица 13 является одной из восьми, так как подвижных соленоидов в электродинамической системе было два и каждый из них делился на четыре зоны, для средних радиусов которых и подсчитывались изменения постоянной взаимодействия.



Суммарное значение этих изменений для каждого подвижного соленоида характеризуется следующими величинами:

$$\sum \Delta f_i = 0,00147.$$

Общая поправка, исходя из того, что в каждой зоне неподвижного соленоида 5 витков, а в зоне подвижных соленоидов 14, составляет приблизительно величину

$$\Delta F = 0,00147 \cdot 70 = 0,10,$$

а относительная погрешность — величину

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{0,10}{386\,000} \cdot 100\% \leq 0,00004\%.$$

т. е. значительно меньше погрешности непосредственных измерений диаметра. Вследствие этого среднее значение диаметра, равное диаметру цилиндра, вызывающего такую же силу взаимодействия, можно принимать за расчетную величину в формуле (64).

### § 5. Вычисление постоянной токовых весов $F$

Вычисление постоянной токовых весов производилось по известным формулам (64) и (65).

Так как подвижных соленоидов было два, то вычисление постоянных токовых весов было проделано для каждого из них отдельно, и общая постоянная принята равной сумме обеих постоянных:

$$F = F^{(1)} + F^{(2)}.$$

Результаты вычислений основного члена для каждой пары соленоида приведены в табл. 14 и 15.

Таблица 14

Вычисление силы  $F^{(1)}$

$z_4 - z_2 = 17,678841$	$z_4 - z_1 = 22,305409$	$z_3 - z_2 = 2,313284$
$(r_1 + r_2)^2 = 522,5727$	522,5727	522,5727
$(r_1 - r_2)^2 = 17,82064$	17,82064	17,82064
$k = 0,7774386$	0,7634234	0,9778074
$K = 1,954362$	1,849697	2,971187
$E = 1,296030$	1,353254	1,054445
$K - E = 0,6583320$	0,496443	1,916742
$A_1 = 336,3347$	353,673	101,8775
$(\Pi - K)_I = 10,52359$	9,449636	25,22820
$(\Pi - K)_{II} = 10,52358$	9,44963	25,22817
$B_1 = 114,7495$	117,6051	45,26398
$A_1 - B_1 = 221,5852$	236,0679	56,61352

$$2(A_3 - B_3) + (A_1 - B_1) - (A_2 - B_2) = 0,9874444 \text{ дин/а}^2$$

$$\frac{2\pi w_1 w_2}{l_1 l_2} = 787,9886$$

$$F^{(1)} = 787,9886 \times 0,9874444 = 778,0949 \text{ дин/а}^2.$$

Таблица 15

Вычисление силы  $F^{(2)}$ 

$z_1 = 17,678485$	$z_2 = 22,305766$	$z_3 = 2,313641$
$(r_1 + r_2)^2 = 588,6422$	588,6422	588,6422
$(r_1 - r_2)^2 = 7,948734$	7,948734	7,948734
$h = 0,8027308$	0,7311740	0,9887400
$K = 2,000639$	1,884568	3,298739
$E = 1,273887$	1,333006	1,031401
$K - E = 0,726732$	0,551562	2,267338
$A_4 = 385,6869$	405,47538	127,8509
$(\Pi - K)_I = 19,32101$	17,08342	60,39566
$(\Pi - K)_{II} = 19,32100$	17,08341	60,39570
$B_3 = 90,44181$	91,904570	45,57305
$A_1 - B_1 = 295,24509$	313,57081	82,27785

$$2(A_3 - B_3) + (A_1 - B_1) - (A_2 - B_2) = 1,46229955$$

$$\frac{2\pi w_1 w_2}{l_1 l_2} = 787,8672;$$

$$F^{(2)} = 787,8672 \times 1,46229955 = 1152,098 \text{ дин/а}^2.$$

Поправочные члены  $\delta F_x$  и  $\delta F_y$  вычислены по формулам (71) и (71a) и значения их приведены в табл. 16.

Таблица 16

## Вычисление поправочных членов

Подвижный соленоид № 1		Подвижный соленоид № 2	
$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$
$\delta F_{z1}^{(1)} = 1,20$	$\delta F_{z1}^{(1)} = 1,90$	$\delta F_{z1}^{(2)} = 1,29$	$\delta F_{z1}^{(2)} = 1,56$
$\delta F_{z2}^{(1)} = -1,39$	$\delta F_{z2}^{(1)} = -1,90$	$\delta F_{z2}^{(2)} = -1,47$	$\delta F_{z2}^{(2)} = -1,88$
$\delta F_{z3}^{(1)} = 0,20$	$\delta F_{z3}^{(1)} = 2,63$	$\delta F_{z3}^{(2)} = 0,21$	$\delta F_{z3}^{(2)} = 1,53$
$\delta F_{z4}^{(1)} = 0,20$	$\delta F_{z4}^{(1)} = 2,63$	$\delta F_{z4}^{(2)} = 0,21$	$\delta F_{z4}^{(2)} = 1,53$
$\sum \delta F_z^{(1)} = 0,21$	$\sum \delta F_z^{(1)} = 5,27$	$\sum \delta F_z^{(2)} = 0,24$	$\sum \delta F_z^{(2)} = 2,74$

Постоянная токовых весов для двух половин неподвижного соленоида равна удвоенной сумме основных и поправочных членов, т. е.:

$$F = 2 \left[ F^{(1)} + F^{(2)} + \sum \delta F_z^{(1)} + \sum \delta F_z^{(2)} + \sum \delta F_x^{(1)} + \sum \delta F_x^{(2)} \right].$$

Поэтому численное значение ее в соответствии с данными табл. 14, 15, 16 будет:

$$F = 3860,5550 \text{ дин}/a^2.$$

### Глава III

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

### § 1. Исследование и юстировка токовых весов

К основным операциям, относящимся к регулированию и исследованию токовых весов, относятся следующие: регулирование и исследование весов, предварительная установка соленоидов, определение чувствительности весов, определение цены деления гальванометра, настройка электрической схемы, окончательная установка соленоидов, определение влияния подводящих проводов.

В результате этих исследований было установлено, что цена деления оптической шкалы весов составляет около 0,08 мг, а колебания положения равновесия при такой чувствительности доходят до  $\pm 0,5$  деления шкалы. Значительной неравноплечности весов не обнаружено, период колебаний весов около 90 сек.

Установка соленоидов или совмещение их вертикальных осей и центральных плоскостей производились электромагнитным методом. Этот метод основывается на зависимости силы электродинамического взаимодействия между соленоидами от их относительного расположения.

Из теоретического рассмотрения вытекает, что по мере удаления вертикальных осей соленоидов друг от друга сила взаимодействия между этими соленоидами увеличивается. Следовательно, признаком совмещения осей соленоидов может служить минимальное значение силы их взаимодействия. Наоборот, удаление друг от друга центральных плоскостей или центров соленоидов уменьшает силу взаимодействия между ними. В этом случае максимальное значение силы взаимодействия может служить признаком совмещения центральных плоскостей соленоидов.

Процесс установки соленоидов разделяется на три последовательных операции. Две из них выполняются для совмещения вертикальных осей и одна — для совмещения горизонтальных плоскостей или центров соленоидов.

Сущность каждой операции состоит в перемещении соленоидов друг относительно друга в одном из трех взаимно перпендикулярных направлений, через равные интервалы, и в определении силы взаимодействия для каждого интервала.



Так как подвижный соленоид подвешен на коромысле весов и занимает вполне определенное неизменное положение, то практически все перемещения производятся за счет неподвижного соленоида, который, как было сказано выше, имеет для этого специальное устройство.

Каждое из трех перемещений дает возможность обнаружить в одном из интервалов максимум или минимум силы взаимодействия и тем самым найти то положение, в котором должны быть установлены соленоиды.

Ниже приводятся три графика (рис. 30) с результатами определений сил взаимодействия, выполненных через интервалы, равные 0,2 мм. Два из них относятся к горизонтальным перемещениям и один — к вертикальному.

Координаты, соответствующие максимуму или минимуму силы взаимодействия, определяют требуемое положение неподвижного соленоида.

Хотя токовые весы находились в помещении, из которого все ферромагнитные материалы были удалены и в котором, кроме подводящих проводов для питания токовых весов, не было никаких иных, однако в смежных комнатах имелось и то и другое. Так как, с одной стороны, магнитное поле рассеяния подвижной катушки простиралось на значительное расстояние, а с другой, магнитное поле постоянных токов, протекающих в соседних помещениях, могло также простираться на такое же расстояние, то не исключена возможность появления добавочных сил взаимодействия между этими полями, а также полями, создаваемыми ферромагнитными материалами.

Кроме того, возможно влияние подводящих проводов, хотя все они монтировались в виде попарно скрученных или же в виде концентричных, изолированных друг от друга цилиндров.

Рассмотрим сначала этот вопрос с теоретической точки зрения.

Влияние внешних полей может иметь или характер постоянной действующей силы, или же характер переменной силы, изменяющей свое направление с переменной направления тока в катушках токовых весов.

Внешние постоянные токи, текущие по проводам в одном направлении, будут действовать на подвижную катушку всегда в одном и том же направлении, если направление тока в ней остается неизменным.

Мягкое же железо, намагничиваемое неподвижной катушкой токовых весов при перемене в ней направления тока, будет менять направление поля с изменением направления тока. Так же будет изменять свое направление и сила, действующая со стороны подводящих проводов.

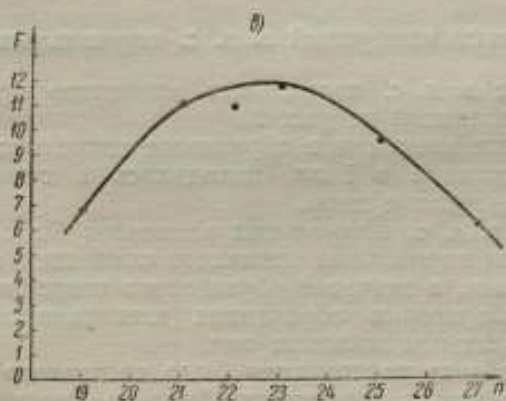
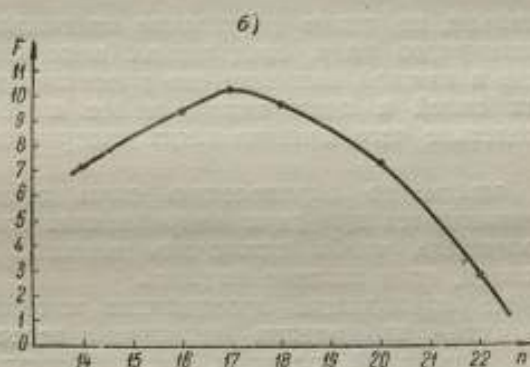
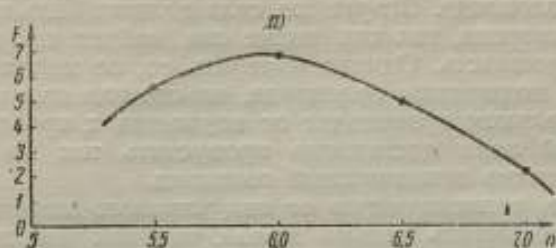


Рис. 30. Графики юстировки соленоидов в токовых весах: а — горизонтальное перемещение неподвижной катушки по оси  $x$ ; б — то же, по оси  $y$ ; в — вертикальное перемещение

Первая сила может быть полностью исключена, если наблюдения производить при двух направлениях тока в неподвижном соленоиде. Вторая же сила должна быть каким-либо образом измерена, так как иначе она войдет как систематическая погрешность. Однако измерить ее, не меняя направления тока в подвижном соленоиде, можно только в том случае, если она целиком происходит от подводящих проводников.

Для этой цели достаточно пропустить ток по этим проводам, отключив неподвижный соленоид.

Силу же, происходящую от индуктивного намагничивания, нужно предполагать весьма малой, так как ближе, чем на расстоянии трех метров, ферромагнитных материалов не имелось.

Действительно, на таком расстоянии максимальная напряженность магнитного поля, создаваемая неподвижным соленоидом, когда в каждой половине его протекает ток в разных направлениях силой в один ампер, менее тысячных долей эрстеда, вследствие чего влияние таких материалов ничтожно мало.

Поэтому опыты по определению силы взаимодействия катушки производятся при двух направлениях токов в неподвижном соленоиде, чтобы исключить влияние постоянных магнитных полей, если таковые имелись.

Влияние же подводящих проводников измерялось непосредственно путем наблюдения отклонения весов при включении тока в подвижный соленоид, когда обмотка неподвижного соноида коротко замкнута.

## § 2. Результаты измерений э. д. с. нормальных элементов

Измерение э. д. с. нормальных элементов производилось на схеме, показанной на рис. 20.

Нормальные элементы и образцовое сопротивление, номинальным значением в 1 ом, находились в помещении, где расположены токовые весы.

Значения э. д. с. нормальных элементов были определены в лаборатории нормальных элементов сличением с групповым эталоном вольта, а значение образцового сопротивления определено в лаборатории образцовых электрических мер сличением с групповым эталоном ома.

При разработке конструкции было поставлено требование, чтобы охлаждающая поверхность была по возможности большой и превышение температуры над окружающей было бы минимальным.

Номинальная нагрузка катушки 20 *вт*.

Нормальные элементы и образцовое сопротивление помещены в масляные ванны. По истечении трех-четырех часов после включения схемы температурный режим как в электро-

динамической системе токовых весов, так и в образцовом сопротивлении оставался постоянным, и дальнейшего повышения температуры не наблюдалось.

Температура в центре масляной ванны образцового сопротивления устанавливалась на уровне, превышающем окружающую на 0,4—0,6°C.

Температура в пространстве вблизи соленоидов получалась различной в зависимости от температуры охлаждающей воды, протекавшей по змеевику. В большинстве случаев температура воздуха вблизи неподвижного соленоида была около 20°C и внутри пространства подвижных соленоидов заключалась в промежутке от 21 до 22°C.

Для оценки влияния температуры соленоидов на результаты измерения были произведены опыты по измерению изменения диаметра соленоида при повышении температуры. Для возможно большего приближения к реальным условиям работы через соленоиды пропускался ток силой в 1 а. Термометр помещался в узком промежутке между двумя соленоидами, жестко скрепленными на специальном основании.

Измерение возможно было производить на наружном подвижном соленоиде. Для этой цели применялся микрометр с нулевым указателем, причем для тепловой изоляции микрометра контакт с витками осуществлялся через керамические кубики.

По истечении трех часов температурный режим в пространстве между соленоидами устанавливался на уровне, превышающем окружающую температуру на 4—6°C.

Ниже приводится табл. 17, характеризующая изменение диаметра соленоида при протекании тока силой в 1 а при повышении температуры.

Таблица 17

Изменение диаметра соленоида с повышением температуры

Время наблюдения	Температура, °C	Изменение диаметра, мк
15 час. 30 мин.	18,8	0
15 " 45 "	21,5	1,0
15 " 55 "	22,4	2,0
16 " 10 "	23,5	2,0
16 " 20 "	24,0	2,5
16 " 45 "	24,5	3,0
17 " 00 "	24,8	3,5
17 " 10 "	25,0	4,0
17 " 28 "	25,0	4,0

При оценке температурных влияний следует иметь в виду, что тепловые расширения неподвижного и подвижного соле-

ноидов имеют противоположные влияния на изменение силы взаимодействия между соленоидами, вследствие чего необходимо принимать во внимание разность температур вблизи подвижного и неподвижного соленоидов.

Как можно видеть из табл. 18, эта разность в большинстве случаев составляет величину от 1 до 1,5 °C.

Если взять эти предельные разности температур и воспользоваться данными табл. 17, то изменение диаметра  $\Delta d$  соленоида при  $\Delta t = 1,5$  °C будет  $\Delta d = \frac{4 \cdot 1,5}{6,2} = 1$  мк и при  $\Delta t = 1$  °C будет  $\Delta d = 0,7$  мк.

В соответствии с приведенными выше дифференциальными коэффициентами, получим:

$$\frac{\Delta F}{F} = 1,8 \frac{\Delta r_2}{r_2} + 1,1 \cdot \frac{\Delta r_3}{\Delta r_3}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right) \% = 0,0014 \% \text{ при } \Delta t = 1,5^\circ \text{C и}$$

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right) \% = 0,0010 \% \text{ при } \Delta t = 1^\circ \text{C.}$$

Поэтому полученные значения э. д. с. нормальных элементов должны быть больше на величину  $\Delta E$ , определяемую по формуле:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta F}{F}\right) E.$$

Для уравнивания весов применялась гири в виде медного стержня объемом 0,96 см<sup>3</sup> и массой, равной 8,15078 г. Вес гири в воздухе при нормальных условиях составлял 8,1496 г.

Таким образом,

$$Q_{np} = 8,1496, \pm ak,$$

где  $Q_{np}$  — приведенный вес гири.

Если процесс уравнивания требовал применения рейтера, то приведенный вес рейтера алгебраически добавляется к приведенному весу гири.

Подгонка гири была выполнена настолько удовлетворительно, что не потребовала применения рейтера при измерении э. д. с. четырех нормальных элементов, полученных от лаборатории нормальных элементов.

В соответствии с вычисленным значением постоянной токовых весов, сила тока в амперах определялась по формуле:

$$I = \sqrt{\frac{Q_{np} g \cdot 100}{2F}} = \sqrt{\frac{Q_{np} \cdot 981,931 \cdot 100}{772111}}$$



Таблица 18

## Результаты измерений э. д. с. нормальных элементов на токовых весах

№ нормальных элементов	Дата измерений	Приведенная масса, г	Сила тока в соединении, мкА	Температура близлежащего соединительного провода, °С	Температура близлежащего соединительного провода, °С	Температура образцового сопротивления, °С	Температура нормального элемента, °С	Э. д. с. нормального элемента, в	Э. д. с. приведенная к 20°С, $E_{н.э.}$	Э. д. с. исправления на расширение соединителей, в	Э. д. с. по данным лабораторий нормальных элементов, $E_{н.э.}$	Разность э. д. с. $E_{н.э.} - E_{н.э.}^{МВЭ}$
5541	13/XI	8,15115	1,01814 <sub>6</sub>	19,7	22,0	19,7	19,4	1,01862 <sub>6</sub>	1,01860 <sub>2</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	0
5541	13/XI	8,15086	1,01812 <sub>6</sub>	19,85	22,1	20,1	19,45	1,01851 <sub>9</sub>	1,01858 <sub>4</sub>	1,01858 <sub>3</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	3
5541	15/XI	8,15033	1,01809 <sub>4</sub>	19,9	21,4	20,5	20,0	1,01858 <sub>8</sub>	1,01858 <sub>8</sub>	1,01858 <sub>1</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	10
5541	16/XI	8,15027	1,01809 <sub>1</sub>	19,9	21,4	20,5	20,0	1,01858 <sub>6</sub>	1,01858 <sub>6</sub>	1,01858 <sub>3</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	3
5541	16/XI	8,15037	1,01809 <sub>3</sub>	19,9	21,0	20,6	19,85	1,01859 <sub>4</sub>	1,01859 <sub>2</sub>	1,01858 <sub>7</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	4
5541	16/XI	8,15038	1,01809 <sub>3</sub>	19,8	21,0	20,3	19,95	1,01858 <sub>5</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	1,01858 <sub>5</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	6
5541	20/XI	8,14939	1,01803 <sub>0</sub>	20,9	21,6	21,5	21,2	1,01854 <sub>6</sub>	1,01855 <sub>9</sub>	1,01855 <sub>8</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	4
5541	20/XI	8,14936	1,01803 <sub>4</sub>	20,9	22,1	21,5	21,2	1,01854 <sub>3</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	1,01858 <sub>5</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	5
5541	22/XI	8,14938	1,01803 <sub>5</sub>	20,9	21,6	21,5	21,2	1,01854 <sub>4</sub>	1,01859 <sub>2</sub>	1,01858 <sub>9</sub>	1,01859 <sub>1</sub>	2
5539	14/XI	8,150035	1,01809 <sub>6</sub>	19,9	21,4	20,0	20,0	1,01858 <sub>1</sub>	1,01858 <sub>1</sub>	1,01857 <sub>4</sub>	1,01858 <sub>1</sub>	7
5539	14/XI	8,150026	1,01809 <sub>0</sub>	19,9	21,4	20,2	19,95	1,01857 <sub>0</sub>	1,01857 <sub>7</sub>	1,01857 <sub>0</sub>	1,01858 <sub>1</sub>	11
5539	22/XI	8,14920	1,01802 <sub>4</sub>	20,9	21,6	21,4	21,2	1,01853 <sub>2</sub>	1,01858 <sub>0</sub>	1,01857 <sub>7</sub>	1,01858 <sub>1</sub>	4
5629	22/XI	8,14988	1,01806 <sub>7</sub>	20,9	21,6	21,6	21,2	1,01857 <sub>3</sub>	1,01862 <sub>6</sub>	1,01862 <sub>3</sub>	1,01862 <sub>1</sub>	5
5630	22/XI	8,14992	1,01806 <sub>9</sub>	20,9	21,6	21,6	21,2	1,01858 <sub>0</sub>	1,01863 <sub>0</sub>	1,01862 <sub>5</sub>	1,01863 <sub>1</sub>	6

и э. д. с. нормального элемента вычислялась по формуле:

$$E_{t_2} = IR_{t_2},$$

где

$$R_{t_2} = 1,000477 + 16,2 (t_2 - 20) - 0,538 (t_2 - 20)^2 \cdot 10^{-6}.$$

Значение ускорения силы тяжести  $g$  было принято равным  $981,931 \text{ см/сек}^2$ , которое было получено в Потсдамской системе из гравиметрических измерений, проводившихся в 1947 и 1948 гг. между ВНИИМ и Пулково.

В табл. 18 приводятся в хронологическом порядке данные, полученные при измерении э. д. с. четырех нормальных элементов в 1951 г.

Из приведенной таблицы видно, что разности между измеренным значением э. д. с. нормальных элементов и данными лаборатории нормальных элементов составляют в среднем  $6 \text{ мкв}$ .

Измерения 1950 г., производившиеся с другими подвижными катушками, имевшими другие размеры, дали расхождение от  $+1$  до  $-15 \text{ мкв}$ , что можно видеть из табл. 19.

Таблица 19

Результаты измерений э. д. с. нормальных элементов

Номера нормальных элементов	Э. д. с. по измерениям на токовых весах	Э. д. с. по данным лаборатории нормальных элементов	Разность в микровольтах
5526	1,018608	1,018607	+1
5539	1,018616	1,018621	-5
5541	1,018615	1,018624	-9
5585	1,018584	1,018594	-10
5586	1,018580	1,018595	-15
			Среднее -7,5

### § 3. Погрешности определений силы тока и э. д. с.

Относительная погрешность определения абсолютного значения силы тока складывается из двух погрешностей: относительной погрешности непосредственных измерений силы взаимодействия и относительной погрешности определения постоянной токовых весов.

Так как постоянная токовых весов является функцией диаметров соленоидов, их длины и числа витков, то, дифферен-

цируя формулу (64) и переходы к погрешностям, получим для одной пары соленоидов следующее уравнение:

$$\left(\frac{\Delta F_1}{F_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{F_1} \frac{\partial F_1}{\partial r_1}\right)^2 \left(\frac{\Delta r_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{F_1} \frac{\partial F_1}{\partial r_2}\right)^2 \left(\frac{\Delta r_2}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{l_1}{F_1} \frac{\partial F_1}{\partial l_1}\right)^2 \left(\frac{\Delta l_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{F_1} \frac{\partial F_1}{\partial l_2}\right)^2 \left(\frac{\Delta l_2}{l_2}\right)^2.$$

Такое же выражение будет иметь место и для другой пары соленоидов, если вместо  $F_1$ ,  $r_2$ ,  $l_2$  подставить  $F_2$ ,  $r_1$  и  $l_1$ .

Производные от  $F$  по параметрам  $r_k$  и  $l_n$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial r_k} = 2 \frac{\partial f_1}{\partial r_k} + \frac{\partial f_2}{\partial r_k} - \frac{\partial f_3}{\partial r_k}; \quad \frac{\partial F}{\partial l_n} = 2 \frac{f_1}{l_n} + \frac{\partial f_2}{\partial l_n} + \frac{\partial f_3}{\partial l_n}, \quad (74)$$

где

$$\frac{\partial f_1}{\partial r_k} = \frac{2\pi w_1 w_2}{l_1 l_2} k_l r_l \sqrt{\frac{r_k}{r_l}} \left[ K_{(k,l)} + \frac{(r_l - r_k)}{r_l + r_k} \Pi_{(k,l)} \right]; \quad (74a)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_n} = M \frac{w_1 w_2}{l_1 l_2} \frac{\partial z_l}{\partial k} - \frac{f_1}{l_n}; \quad (74b)$$

при этом индексы  $k=1,2$ ,  $n=1,2$  и  $k \neq n$ ,  $M$  — взаимная индуктивность.

Общий результат для трех соленоидов — неподвижного и двух подвижных — получится в следующем виде:

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 = b_1^2 \left(\frac{\Delta r_1}{r_1}\right)^2 + b_2^2 \left(\frac{\Delta r_2}{r_2}\right)^2 + b_3^2 \left(\frac{\Delta r_3}{r_3}\right)^2 + a_1^2 \left(\frac{\Delta l_1}{l_1}\right)^2 + a_2^2 \left(\frac{\Delta l_2}{l_2}\right)^2 + a_3^2 \left(\frac{\Delta l_3}{l_3}\right)^2. \quad (75)$$

Численные величины коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ , вычисленные в соответствии с формулами (74), (74a), (74b), имеют следующие значения:

$$b_1 = -2,0; \quad b_2 = 1,8; \quad b_3 = 1,1; \quad a_1 = -0,8; \quad a_2 = -0,03; \quad a_3 = -0,03.$$

Как было указано выше, за погрешности измерения диаметра должны быть приняты погрешности непосредственных измерений, которые по данным лаборатории мер длины оцениваются для диаметра  $\pm 0,5$  мк, а для длины в 1,0 мк. Поэтому, подставляя в уравнении (75) значения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  и принимая во внимание, что  $\Delta r_1 = 0,25$  мк;  $\Delta l_1 = 1$  мк;  $r_1 = 19,5$  см;  $r_2 = 10,7$  см;  $r_3 = 9,3$  см;  $l_1 = 40$  см;  $l_2 = l_3 = 4,6$  см, получим:

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 = 14,10^{-12} + 20 \cdot 10^{-12} + 9 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12} + 2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-12} = 47 \cdot 10^{-12}$$

и

$$\frac{\Delta F}{F} = 7 \cdot 10^{-6}.$$

Значения  $\alpha$ , Д. С. нормальных элементов, измеренные на токовых весах

Номера элементов	5226		5530		5539		5541		5585		5586	
	E	p	E	p	E	p	E	p	E	p	E	p
1	1,018603	-5	1,018603	-2	1,018612	-4	1,018616	+1	1,018581	-3	1,018587	-1
2	605	-3	605	0	616	0	617	+2	585	+1	591	+3
3	604	-4	606	+1	618	+2	622	+7	581	-3	588	0
4	605	-3	606	+1	616	0	614	-1	565	+1	589	+1
5	613	+5	610	+5	623	+7	613	-2	585	+1	585	-3
6	611	+3	609	+4	618	+2	615	0	587	+3	587	-1
7	611	+3	607	+2	613	-3	616	-5	584	0	586	-2
8	608	0	607	+2	619	+3	613	-2	584	0	586	-2
9	610	+2	602	+3	615	-1	615	0	584	0	587	-1
10	611	+3	599	-6	614	-2	616	+1	581	-3	592	+4
Среднее	1,018608		1,018605		1,018616		1,018615		1,018584		1,018588	
$\sigma$	$\pm 4,0$		$\pm 3,1$		$\pm 3,3$		$\pm 3,1$		$\pm 2,1$		$\pm 2,3$	
$\epsilon$	$\pm 2,7$		$\pm 2,1$		$\pm 2,2$		$\pm 2,1$		$\pm 1,4$		$\pm 1,5$	

Так как  $\frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{F}$ , то значение, полученное для  $\frac{\Delta F}{F}$ , показывает, что неисключенная систематическая ошибка при определении тока не превышает  $4 \cdot 10^{-4} \%$ .

Погрешность определения силы тока, обусловленная случайными погрешностями непосредственных измерений силы взаимодействия, определяется из сопоставления ряда независимых наблюдений, проведенных в одних и тех же условиях. В табл. 20 даны результаты измерений э. д. с. шести нормальных элементов, производившиеся в различное время в течение октября—декабря 1950 г. и приведенные к одной и той же температуре  $20^\circ \text{C}$ . Табл. 20 показывает, что отклонения от среднего значения в большинстве случаев не превышают  $\pm 5$  мкв, а средняя квадратичная погрешность одного измерения составляет около 3 мкв.

Передача значения групповому эталону вольты производится путем определения э. д. с. четырех нормальных элементов сравнения, по которым устанавливается методом сличений значение э. д. с. всех элементов, составляющих групповой эталон вольты.

Измерения, произведенные в 1952 г., дали следующие результаты.

Номера элементов сравнения	Значение э. д. с., в
2291	$1,01859_4 \pm 2$ мкв
2733	$1,01860_6 \pm 8$ "
2290	$1,01859_1 \pm 4$ "
2974	$1,01860_8 \pm 4$ "

Приведенные данные служили исходными при установлении среднего значения группового эталона вольты.

При посредстве токовых весов это значение должно определяться и в дальнейшем.

Именно эта цель и ставилась при установлении эталона единицы силы тока—абсолютного ампера.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все данные теоретических выводов, измерений и расчетов, приведенные выше, позволяют сделать выводы относительно точности абсолютных измерений силы тока.

1. Токовые весы с однослойными соленоидами воспроизводят единицу силы тока — ампер — с погрешностями, имеющими следующие источники:

а) отклонение соленоидов от цилиндрической формы вызывает погрешность в величине электродинамической постоянной  $0,0002\%$ ;

б) неточность в определении геометрических размеров вызывает погрешность в величине электродинамической постоянной  $0,0007\%$ .

в) неточность в определении силы электродинамического взаимодействия может составить величину, оцениваемую одним делением оптической шкалы весов, что при постоянной весов  $0,09 \text{ мГ/дел}$  и номинальном значении массы, уравновешивающей гири,  $8 \text{ г}$ , приведет к погрешности определения силы, равной  $0,001\%$ .

Погрешность, указанная в п. „а“, является неисключенной систематической погрешностью.

Погрешность, указанная в п. „б“, имеет двоякую природу. При определении геометрических размеров она носит случайный характер и вызывается в основном неточностью метода; однако после того, как электродинамическая постоянная рассчитана, она становится неисключенной систематической погрешностью при подсчете силы тока и, естественно, не может быть исключена; с точки зрения обработки результатов она может рассматриваться как случайная погрешность.

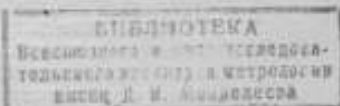
2. Поддержание единицы силы тока должно рассматриваться в том смысле, что случайные погрешности измерений в различные моменты времени не должны превосходить заданной величины. При этом погрешности, указанные в пп. „а“ и „б“, являющиеся в процессе взвешивания неисключенными систематическими погрешностями, при оценке точности поддержания единицы не должны приниматься во внимание. При этих условиях для оценки точности поддержания единицы

должна служить половина погрешности определения уравновешивающей силы, составляющая величину  $0,0005\%$ . Это достигнуто за счет увеличения силы взаимодействия между соленоидами путем применения в качестве подвижной системы двух жестко скрепленных коаксиальных соленоидов.

3. Передача значения единицы эталону вольты производится путем определения э. д. с. нормальных элементов сравнения, причем в схему определения входит и образцовое сопротивление в виде катушки, сличаемой с эталоном ома. Точность определения э. д. с. нормальных элементов, а следовательно, и точность передачи значения единицы групповому эталону вольты уменьшается, так как самая передача представляет собой измерение произведения двух величин. Оценка результатов измерений по арифметическому среднему остаточных погрешностей является в этом случае наиболее правильной, так как приблизительно соответствует наибольшей возможной погрешности результата. Для элементов сравнения это среднее арифметическое остаточных погрешностей составляет величины  $(1 \div 4) \cdot 10^{-4}\%$  измеренной э. д. с. для трех элементов и достигает  $0,0008\%$  для четвертого элемента.

При этих условиях точность передачи значения единицы групповому эталону вольты оценивается погрешностью результата  $0,0004\%$ , так как при эталонировании групповой эталон получает значение от среднего группы четырех элементов сравнения, и во всяком случае не превышает  $0,001\%$ .

Величина этой погрешности находится, по существу, на границе точности абсолютных измерений в настоящее время.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
Введение. Переход от международной системы электрических единиц к абсолютной . . . . .	5

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

#### ТОКОВЫЕ ВЕСЫ С МНОГОСЛОЙНЫМИ КАТУШКАМИ

<i>Глава I. Устройство токовых весов с многослойными катушками и их теория . . . . .</i>	13
§ 1. Устройство токовых весов с многослойными катушками . . . . .	—
§ 2. Взаимодействие линейных контуров . . . . .	16
§ 3. Взаимодействие многослойных катушек конечного сечения . . . . .	19
§ 4. Преобразование выражения для $F$ . . . . .	22
§ 5. Преобразование производных функций $F$ по переменным $r_1$ и $r_2$ через производные по переменной $y$ . . . . .	23
§ 6. Вычисление производных от функции $F$ . . . . .	24
§ 7. Вычисление $\frac{F'_y}{F}$ и $\frac{F''_y}{F}$ . . . . .	27
§ 8. Выражение для поправочного члена $\Delta$ . . . . .	29
§ 9. Выражение для максимума силы между двумя круговыми контурами конечного сечения . . . . .	30
§ 10. Погрешности в определении максимума силы . . . . .	32
<i>Глава II. Определение отношения средних радиусов катушек . . . . .</i>	35
§ 1. Общие принципы определения отношения $\frac{R_1}{R_2}$ . . . . .	—
§ 2. Магнитное поле кругового тока . . . . .	37
§ 3. Магнитное поле катушки с прямоугольным сечением . . . . .	39
§ 4. Поправочные члены . . . . .	40
§ 5. Способ установки катушек и результаты измерений отношения средних радиусов катушек . . . . .	43
<i>Глава III. Результаты измерений . . . . .</i>	51
§ 1. Расчет постоянной токовых весов . . . . .	—
§ 2. Установка катушек в токовых весах . . . . .	52



	3. Измерения силы тока . . . . .	54
00000000	4. Погрешности в определении постоянной токовых весов и в экспериментальном определении силы взаимодействия между катушками . . . . .	58

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### ТОКОВЫЕ ВЕСЫ С ОДНОСЛОЙНЫМИ КАТУШКАМИ

	<b>Глава I. Устройство токовых весов с однослойными катушками и их теория . . . . .</b>	<b>61</b>
00000000	1. Устройство токовых весов . . . . .	—
00000000	2. Взаимодействие между двумя однослойными катушками . . . . .	70
00000000	3. Взаимная энергия между двумя слоистыми катушками винтовой формы . . . . .	71
00000000	4. Взаимная энергия двух винтовых катушек . . . . .	74
00000000	5. Преобразование пределов интегрирования . . . . .	77
00000000	6. Разложение подинтегральной функции в ряд . . . . .	81
00000000	7. Выражение взаимной энергии катушек в виде ряда . . . . .	84
00000000	8. Рекуррентные формулы для нахождения функции $U_n(k)$ . . . . .	86
00000000	9. Формула для нахождения производной функции $U_n(k)$ . . . . .	87
00000000	10. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $U_n(k)$ . . . . .	90
00000000	11. Интегрирование главного члена . . . . .	92
00000000	12. Сила взаимодействия $f$ между двумя соленоидами . . . . .	96
00000000	13. Поправочные члены $\delta F_z$ и $\delta F_x$ . . . . .	97
	<b>Глава II. Методика измерения диаметра и длины соленоидов и расчет постоянной <math>F</math> . . . . .</b>	<b>101</b>
00000000	1. Измерение диаметра . . . . .	—
00000000	2. Измерение длины и шага намотки . . . . .	103
00000000	3. Результаты измерений . . . . .	105
00000000	4. Теоретические расчеты влияния неравномерности диаметра соленоида по его длине . . . . .	107
00000000	5. Вычисление постоянной токовых весов $F$ . . . . .	111
	<b>Глава III. Экспериментальные исследования . . . . .</b>	<b>113</b>
00000000	1. Исследование и юстировка токовых весов . . . . .	—
00000000	2. Результаты измерений в д. с. нормальных элементов . . . . .	116
00000000	3. Погрешности определений силы тока и в. д. с. . . . .	120
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>124</b>

Копия Кувачева

О П Е Ч А Т К И

Страница	Строки	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
52	7 снизу	$f = 86 \times$	$f = 0,01 \times 86 \times$	Автора
112	17 сверху	$= 1,46229955$	$= 1,4622996 \text{ дин/а}^2$	"
118	11 сверху	выше	ниже	"
121	5 снизу	$= 19,5$	$= 13,5$	"

ВНИИМ, вып. 15 (75). Зак. № 1142

43

Исторический

Исторический

Исторический	Исторический	Исторический	Исторический	Исторический
Исторический	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	Исторический	Исторический
"	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	Исторический	Исторический
"	Исторический	Исторический	Исторический	Исторический
"	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	Исторический	Исторический

Исторический

43

Цена 6 р. 30 к.