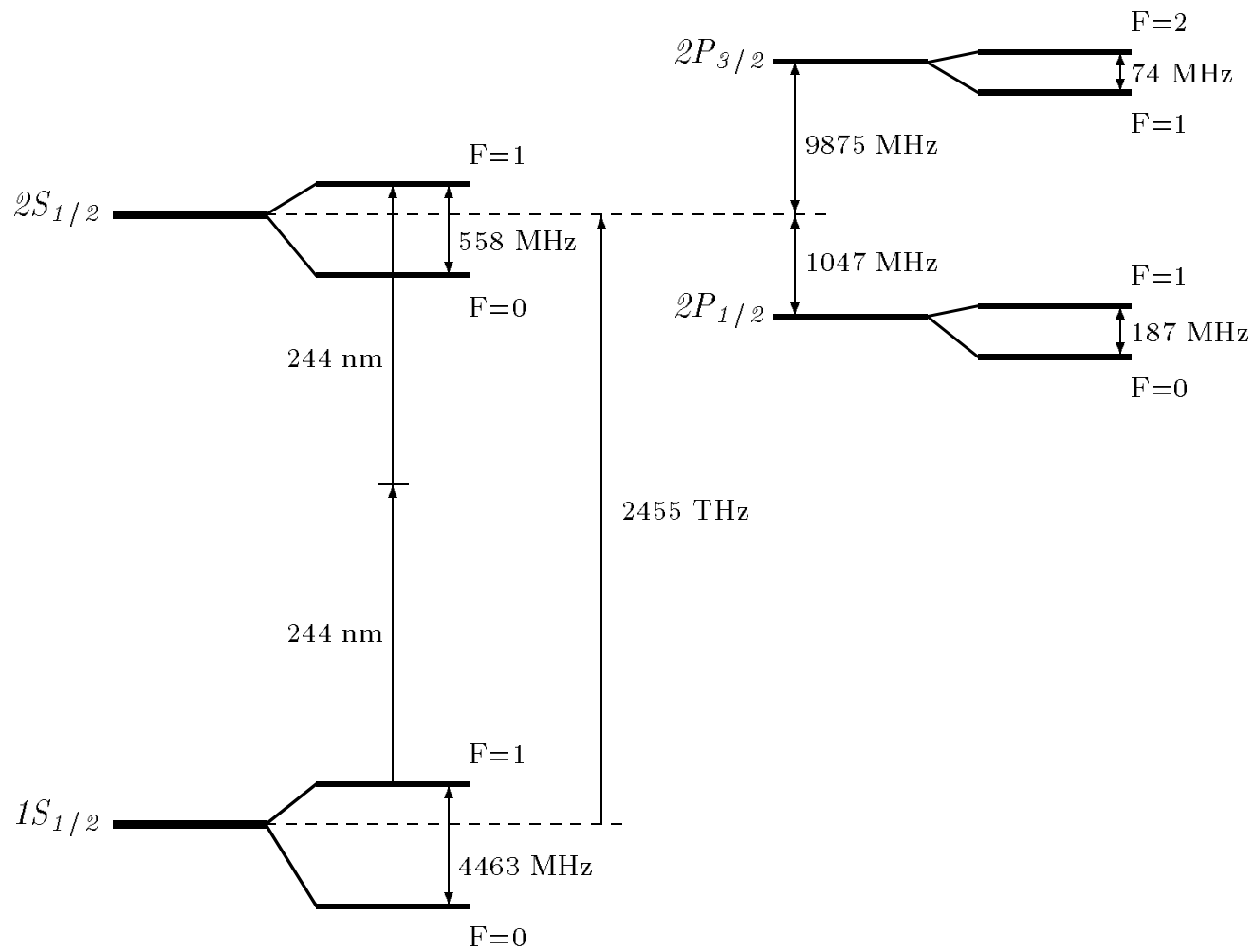


Сверхтонкое расщепление в мюонии

Радиационные поправки к отдаче

В. А. Шелюто, М. И. Эйдес

2 декабря 2008



Уровни энергии мюония

Ведущий вклад в расщепление



Однофотонный обмен

Сверхтонкое расщепление

$$\delta E \sim |\psi(0)|^2 \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \Big|_{F=0}^{F=1}$$

С учетом всех множителей

$$\begin{aligned}\delta E &= \frac{8}{3} (Z\alpha)^4 (1 + a_\mu) \frac{m}{M} \left(\frac{m_r}{m}\right)^3 mc^2 \\ &= \frac{16}{3} Z^4 \alpha^2 (1 + a_\mu) \frac{m}{M} \left(\frac{m_r}{m}\right)^3 ch R_\infty \equiv E_F\end{aligned}$$

Энергия Ферми (1930)

$$E_F \simeq 4\,459\,031.936 \text{ (518) (30) kHz}$$

$$\delta[m_\mu] \simeq 1.2 \times 10^{-7} \text{ , } \delta[\alpha] \simeq 7 \times 10^{-9}$$

Теория

$$\delta E_{HFS}(th) = 4\,463\,302.904 \text{ (518) (30) (70) kHz ,}$$

$$\delta[th] \simeq 1.6 \times 10^{-8}$$

Эксперимент

$$\delta E_{HFS}(ex1) = 4\,463\,302.88 \text{ (16) kHz ,} \quad \delta = 3.6 \times 10^{-8}$$

F. G. Mariam et al, Phys. Rev. Lett. **49**, 993 (1982)

$$\delta E_{HFS}(ex2) = 4\,463\,302.776 \text{ (51) kHz ,} \quad \delta = 1.1 \times 10^{-8}$$

W. Liu et al, Phys. Rev. Lett. **82**, 711 (1999)

Поправки

$$\begin{aligned}\delta E_{HFS} &= E_F \cdot \left[1 + \text{corrections} \right] \\ &= E_F + \delta E_{QED} + \delta E_S + \delta E_W\end{aligned}$$

δE_{QED} – чисто квантовоэлектродинамические поправки

δE_S – вклад сильных взаимодействий (адронная поляризация вакуума)

δE_W – вклад слабых взаимодействий (обмен нейтральным Z_0 -бозоном)

Относительный порядок экзотических вкладов

$$\frac{\delta E_S}{E_F} \sim 5 \cdot 10^{-8}, \quad \frac{\delta E_W}{E_F} \sim 1.5 \cdot 10^{-8}$$

Квантовоэлектродинамические поправки

$$\delta E_{QED} = \mathcal{F} \left[Z\alpha, \frac{\alpha}{\pi}, \frac{m}{M} \right]$$

Три малых параметра:

$Z\alpha$ – эффекты связанности (для мюония заряд ядра $Z = 1$),

$\frac{\alpha}{\pi}$ – радиационные поправки (по одной степени $\frac{\alpha}{\pi}$ на каждую петлю),

$\frac{m}{M}$ – отдачный фактор

Некоторые поправки усилены степенями $\ln \frac{1}{Z\alpha} \simeq 4.9$ или $\ln \frac{M}{m} \simeq 5.3$

Более подробно в книге: Michael I. Eides, Howard Grotch and Valery A. Shelyuto

[Theory of light hydrogenic bound states](#). Springer Tracts in Modern Physics **222**

Berlin – Heidelberg – New York 2007.

Неизвестные вклады четвертого порядка (~ 70 Hz)

$$\alpha^2(Z\alpha) \frac{m}{M} E_F$$

$$\alpha(Z\alpha)^2 \frac{m}{M} E_F$$

$$(Z\alpha)^3 \frac{m}{M} E_F$$

Известные вклады четвертого порядка

$$\alpha(Z\alpha) \left(\frac{m}{M}\right)^2 E_F$$

M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto, Phys. Rev. **D580** (1998) 013008

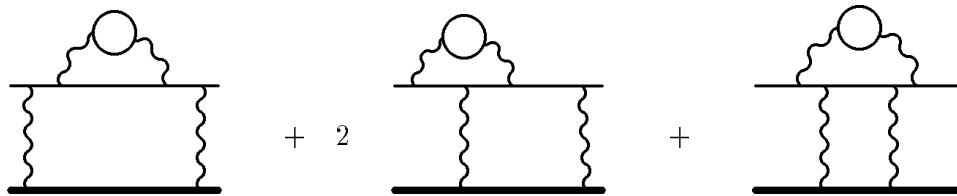
$$(Z\alpha)^2 \left(\frac{m}{M}\right)^2 E_F$$

I. Blokland, A. Czarnecki and K. Melnikov, Phys. Rev. **D65** (2002) 073015

Радиационные поправки к отдаче

$$\alpha^2 (Z\alpha) \frac{m}{M} E_F$$

Пример трехпетлевых диаграмм



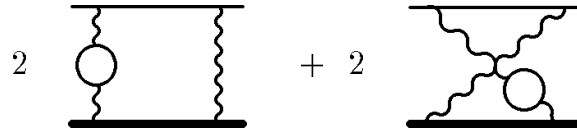
Скелетные диаграммы



$$\delta E \simeq -\frac{3}{2} \frac{Z\alpha}{\pi} \frac{m}{M} E_F \int_{m^2}^{M^2} \frac{dk^2}{k^2}$$

$$\simeq \frac{Z\alpha}{\pi} \frac{m}{M} E_F \left[-3 \cdot \ln \frac{M}{m} \right]$$

Электронная поляризация. Квадрат логарифма



Асимптотика поляризационного оператора $\mathcal{P}(k^2)$ при больших евклидовых импульсах $k^2 \gg m^2$

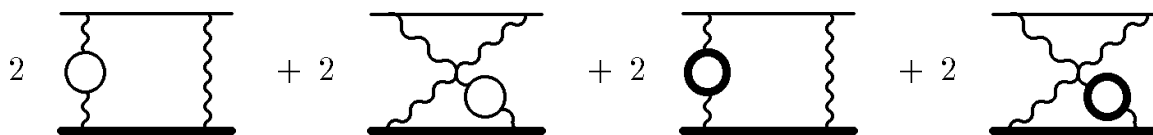
$$\mathcal{P}(k^2) \simeq \frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2$$

Вклад в энергию

$$\delta E \simeq - \frac{3}{2} \frac{Z\alpha}{\pi} \frac{m}{M} E_F \int_{m^2}^{M^2} \frac{dk^2}{k^2} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2$$

$$\simeq \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m}{M} E_F \left[- 2 \cdot \ln^2 \frac{M}{m} \right]$$

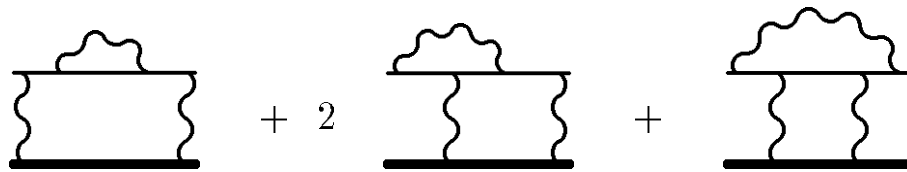
Электронная и мюонная поляризация



$$\delta E \simeq \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m}{M} E_F \left[-2 \cdot \ln^2 \frac{M}{m} - \frac{8}{3} \cdot \ln \frac{M}{m} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{28}{9} \right]$$

J. R. Sapirstein, E. A. Terray and D. R. Yennie, Phys. Rev.**D29**, 2290 (1984)

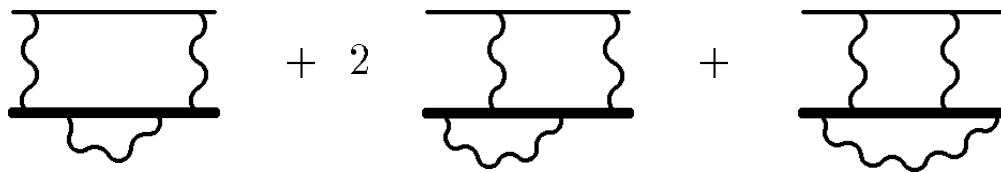
Радиационные вставки в электронную линию



$$\delta E \simeq \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m}{M} E_F \left[\frac{15}{4} \cdot \ln \frac{M}{m} + 6\zeta(3) + 3\pi^2 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{17}{8} \right]$$

С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес, ЖЭТФ **92**, 1188 (1987)

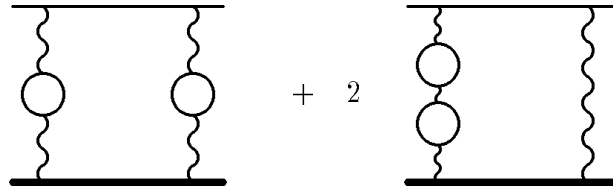
Радиационные вставки в мюонную линию



$$\delta E \simeq \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m}{M} E_F \left[\frac{9}{2} \zeta(3) - 3\pi^2 \ln 2 + \frac{39}{8} \right]$$

С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдем, ЖЭТФ **94**, 42 (1988)

Электронная поляризация. Куб логарифма



Асимптотика поляризационного оператора

$$\mathcal{P}(k^2) \simeq \frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2$$

Вклад в энергию

$$\begin{aligned} \delta E &\simeq -\frac{3}{2} \frac{Z\alpha}{\pi} \frac{m}{M} E_F \int_{m^2}^{M^2} \frac{dk^2}{k^2} \cdot 3 \cdot \left[\frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2 \right]^2 \\ &\simeq \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m}{M} E_F \left[-\frac{4}{3} \cdot \ln^3 \frac{M}{m} \right] \end{aligned}$$

Трехпетлевые радиационные поправки к отдаче

$$\frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} E_F \left[-\frac{4}{3} \cdot \ln^3 \frac{M}{m} + \frac{4}{3} \cdot \ln^2 \frac{M}{m} + C_1 \cdot \ln \frac{M}{m} + C_0 \right]$$

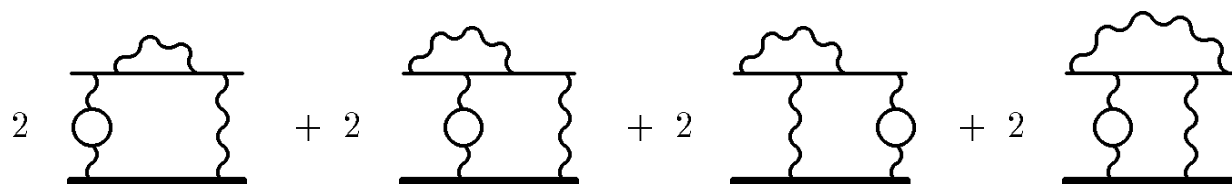
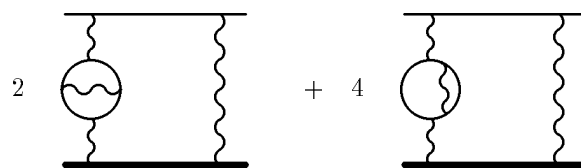
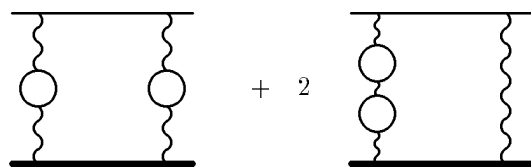
M. I. Eides and V. A. Shelyuto, Phys. Lett. B **146**, 241 (1984)

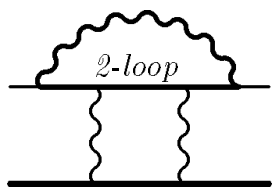
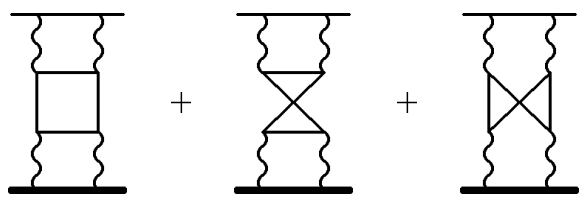
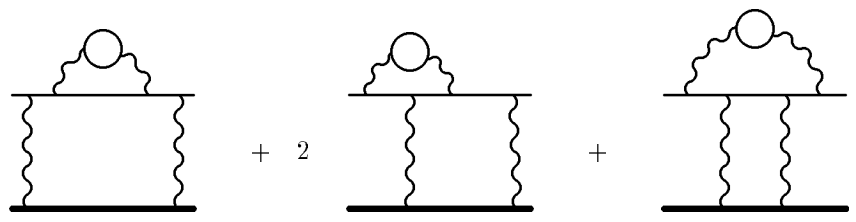
$$-\frac{4}{3} \cdot \ln^3 \frac{M}{m}$$

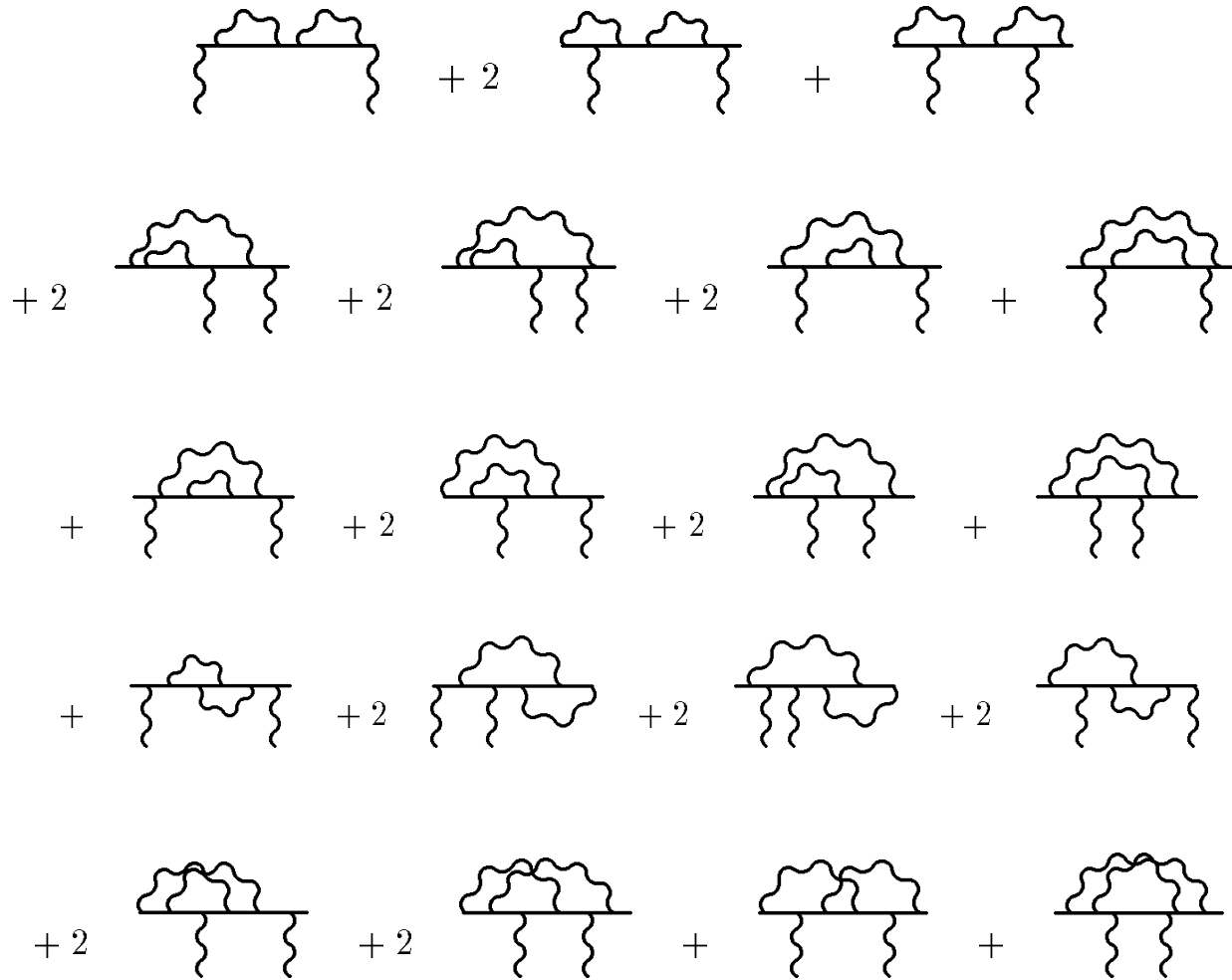
M. I. Eides, S. G. Karshenboim and V. A. Shelyuto, Phys. Lett. B **216**, 405 (1989)

$$\frac{4}{3} \cdot \ln^2 \frac{M}{m}$$

Происхождение квадрата логарифма







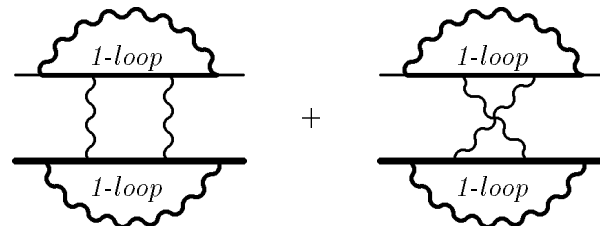
Двухпетлевые поправки к электронной линии

ПРОГРАММА

Первая степень логарифма и константа

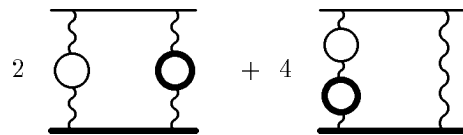
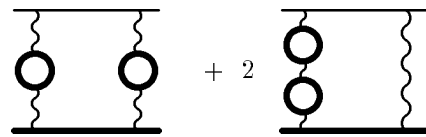
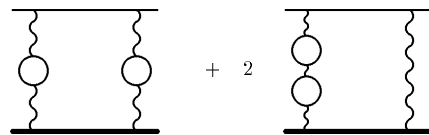
Необходимо дополнить шесть наборов диаграмм

- 1) *мюонной поляризацией вакуума,*
- 2) *радиационными поправками к мюонной линии,*
- 3) *мюонной петлей в рассеянии света на свете*
- 4) *и совершенно новым седьмым набором диаграмм*

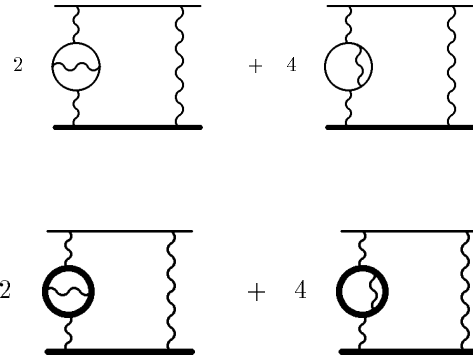


ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОГРАММЫ

Первый калибровочно-инвариантный набор



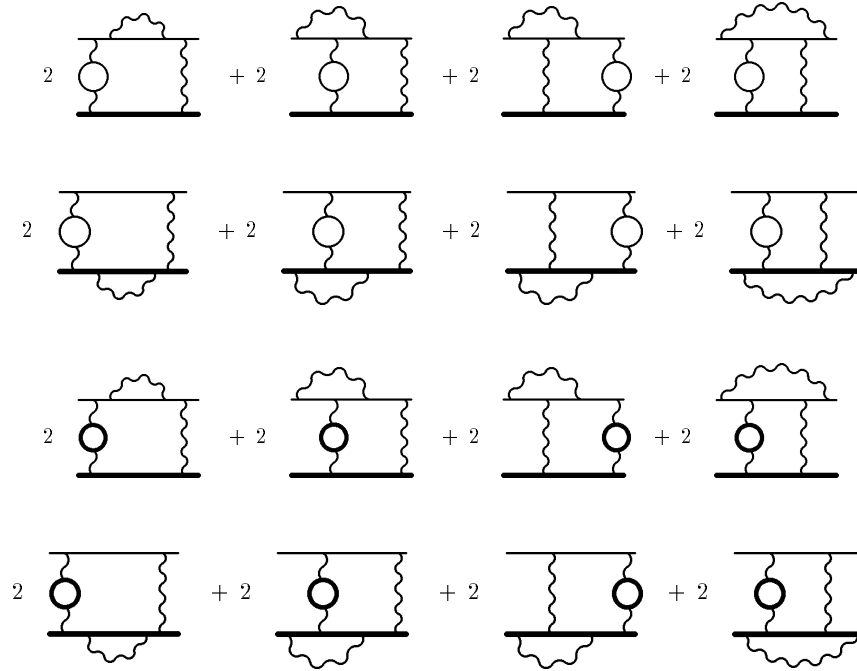
Второй калибровочно-инвариантный набор



$$\delta E_1 + \delta E_2 = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} \tilde{E}_F \left\{ -\frac{4}{3} \ln^3 \frac{M}{m} - \frac{25}{6} \ln^2 \frac{M}{m} - \left[6\zeta(3) + \frac{33}{4} \right] \ln \frac{M}{m} \right. \\ \left. - \frac{97}{8} \zeta(3) - 16 \text{Li}_4 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{2\pi^2}{3} \ln^2 2 - \frac{2}{3} \ln^4 2 + \frac{5\pi^4}{36} - \frac{13\pi^2}{36} - \frac{4495}{432} \right\}$$

M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto, Phys. Rev. **D65** (2001) 013003

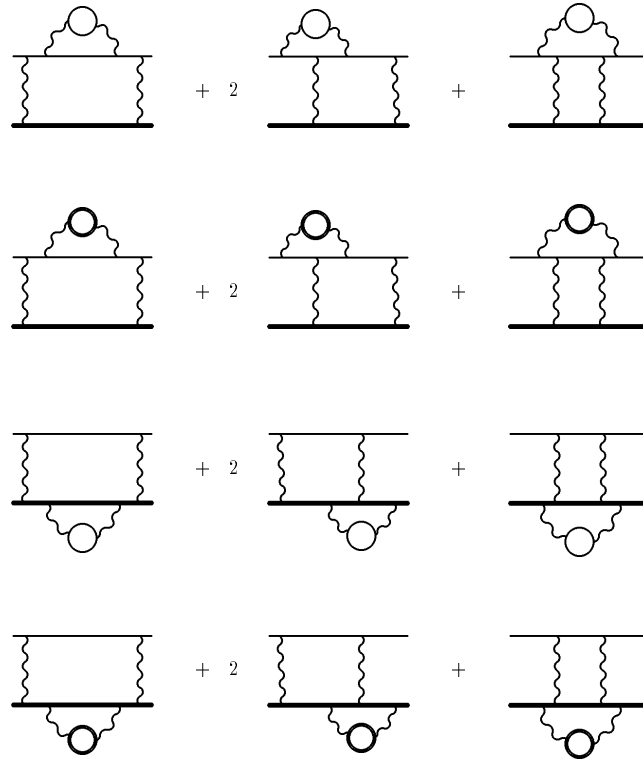
Третий калибровочно-инвариантный набор



$$\delta E_3 = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} \tilde{E}_F \left\{ \frac{5}{2} \ln^2 \frac{M}{m} + \left[6\zeta(3) - 4\pi^2 \ln 2 + \frac{83}{4} \right] \ln \frac{M}{m} + 29.8805 \right\}$$

M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto, Phys. Rev. **D67** (2003) 113003

Четвертый калибровочно-инвариантный набор



$$\delta E_{4e} = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} \tilde{E}_F \left\{ \frac{3}{4} \ln^2 \frac{M}{m} + \left[\frac{5\pi^2}{3} - \frac{155}{9} \right] \ln \frac{M}{m} + 7.08444 \right\}$$

$$\delta E_{4\mu} = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} \tilde{E}_F \left\{ \left[3\zeta(3) - 2\pi^2 \ln 2 + \frac{13}{4} \right] \ln \frac{M}{m} + 11.230 \right\}$$

В. А. Шелюто, М. И. Эйдес (2008), в печати

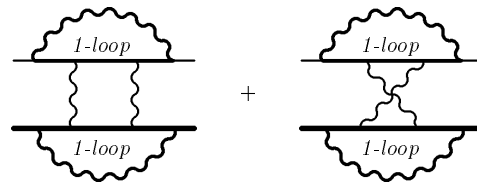
Пятый калибровочно-инвариантный набор: в работе

$$\frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} E_F \left[\frac{9}{4} \cdot \ln^2 \frac{M}{m} + C_{51} \cdot \ln \frac{M}{m} + C_{50} \right]$$

Шестой калибровочно-инвариантный набор: в планах

$$\frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} E_F \left[C_{61} \cdot \ln \frac{M}{m} + C_{60} \right]$$

Седьмой калибровочно-инвариантный набор



$$\delta E_{4\mu} = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} \tilde{E}_F \left[-\frac{15}{8} \zeta(3) + \frac{15\pi^2}{4} \ln 2 + \frac{27\pi^2}{16} - \frac{147}{32} \right]$$

M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto, Phys. Rev. **D70** (2004) 073005