

УДК 521.172:524.834:523.9-332

## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ И СЖАТИЕ СОЛНЦА ИЗ РАДАРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ПЛАНЕТ И КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

© 2005 г. Е. В. Питьева\*

Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 03.09.2004 г.

Для тестирования релятивистских параметров и оценки сжатия Солнца были использованы более 250000 высокоточных американских и российских радарных наблюдений внутренних планет и космических аппаратов, полученных в 1961–2003 гг. Анализ наблюдений проводился на основе эфемерид ЕРМ ИПА РАН, построенных с помощью совместного численного интегрирования уравнений движения девяти больших планет, Солнца и Луны, выполненным в постньютоновском приближении. Гравитационный шум, вносимый в орбиты внутренних планет астероидами, был значительно уменьшен включением в совместное интегрирование уравнений движения 301 крупных астероидов и возмущений от массивного кольца малых астероидов. Постньютоновские параметры и сжатие Солнца вызывают различные вековые и периодические эффекты в орбитальных элементах всех планет, поэтому удалось получить из совместного решения оценки постньютоновских параметров:  $\beta = 1.0000 \pm 0.0001$ ,  $\gamma = 0.9999 \pm 0.0002$ ; квадрупольного момента Солнца  $J_2 = (1.9 \pm 0.3) \times 10^{-7}$ ; оценку изменения гравитационной постоянной  $\dot{G}/G = (-2 \pm 5) \times 10^{-14}$  в год. Полученные результаты показывают замечательное соответствие движений планет и распространения света общей теории относительности и значительно сужают область возможных значений альтернативных теорий гравитации.

*Ключевые слова:* небесная механика, космология, Солнце.

RELATIVISTIC EFFECTS AND SOLAR OBLATENESS FROM RADAR OBSERVATIONS OF PLANETS AND SPACECRAFT, by E. V. Pitjeva. We used more than 250 000 high-accuracy American and Russian radar observations of the inner planets and spacecraft obtained in the period 1961–2003 to test the relativistic parameters and to estimate the solar oblateness. Our analysis of the observations was based on the EPM ephemerides of the Institute of Applied Astronomy, Russian Academy of Sciences, constructed by the simultaneous numerical integration of the equations of motion for the nine major planets, the Sun, and the Moon in the post-Newtonian approximation. The gravitational noise introduced by asteroids into the orbits of the inner planets was reduced significantly by including 301 large asteroids and the perturbations from the massive ring of small asteroids in the simultaneous integration of the equations of motion. Since the post-Newtonian parameters and the solar oblateness produce various secular and periodic effects in the orbital elements of all planets, these were estimated simultaneously: the post-Newtonian parameters  $\beta = 1.0000 \pm 0.0001$  and  $\gamma = 0.9999 \pm 0.0002$ , the quadrupole moment of the Sun  $J_2 = (1.9 \pm 0.3) \times 10^{-7}$ , and the change in the gravitational constant  $\dot{G}/G = (1 \pm 5) \times 10^{-14} \text{ yr}^{-1}$ . The results obtained show remarkable agreement between the planetary motions and the propagation of light in General Relativity and narrow significantly the range of possible values of alternative gravitation theories.

*Key words:* celestial mechanics, cosmology, Sun.

### ВВЕДЕНИЕ

Радиолокационные наблюдения планет начались в 1961 г. и с тех пор широко вошли в астрономическую практику. Высокоточные радиолокационные измерения, охватывающие временной интервал более сорока лет, позволяют получить с

большой точностью не только орбитальные элементы планет, но и другие постоянные планетной теории, в том числе и релятивистские параметры.

Из трех основных тестов общей теории относительности в солнечной системе — вековые движения перигелиев планет, запаздывание сигнала и отклонение света в гравитационном поле — по радарным наблюдениям планет и космических аппаратов (КА) были проверены два первых.

\*Электронный адрес: [evp@quasar.ipa.nw.ru](mailto:evp@quasar.ipa.nw.ru)

Главный и лучше всего определяемый релятивистский эффект в солнечной системе — это вековое движение перигелия Меркурия, которое было открыто Леверье в 1859 г. Оно являлось для него основной проблемой расхождения между теоретическими предсказаниями и наблюдениями, и было объяснено в 1915 г. общей теорией относительности (ОТО) Эйнштейна. Однако, как известно, вековое движение перигелия Меркурия зависит от линейной комбинации постньютоновских (ППН) параметров ( $\beta$ ,  $\gamma$ ) и квадрупольного момента Солнца ( $J_2$ ). В последнее время появились работы (см., например, Перо, Розелот, 2003), утверждающие о возможности определения лишь этой комбинации, а не самих значений трех параметров из современных наблюдений. Однако ППН-параметры и солнечное сжатие вызывают различные вековые и периодические возмущения как для разных орбитальных элементов (а не только для перигелиев), так и для разных планет. Кроме того, параметр  $\gamma$  определяется также из эффекта Шапино, что позволяет получить значения всех трех параметров. В большинстве случаев эти параметры могут быть получены из анализа вековых изменений элементов орбиты, поэтому ошибки их определения уменьшаются с увеличением временного интервала наблюдений. Ошибки же одного из самых интересных параметров — векового изменения гравитационной постоянной ( $\dot{G}/G$ ) — уменьшаются даже более быстро: как квадрат временного интервала, что позволяет оценить значение  $\dot{G}/G$ , тем самым по существу проверяя сильный принцип эквивалентности, так как многие теории гравитации предсказывают изменение локально измеряемой ньютоновской гравитационной постоянной со временем в шкале эволюции Вселенной.

Некоторые недавние определения ППН-параметров, например,  $\gamma = 1.000021 \pm 0.000023$ , из радиотехнических наблюдений КА Cassini (Бертотти и др., 2003) достигают высокой точности. Но улучшение качества и увеличение количества современных радарных наблюдений планет и КА, а также увеличение временного интервала наблюдений позволили оценить не только  $\gamma$ , но также  $\beta$ ,  $\dot{G}/G$  и квадрупольный момент Солнца независимо и по другим данным.

#### МЕТОДИКА, ЭФЕМЕРИДЫ ЕРМ

В работе для вычисления релятивистских параметров и сжатия Солнца был применен следующий метод. Предварительно с использованием более 317 000 наблюдений (1913–2003 гг.) различных типов, включая радиометрические измерения планет и КА, ССД астрометрические наблюдения внешних планет и их спутников, меридианные и фотографические наблюдения была

построена численная теория движения планет и Луны ЕРМ2004 — Ephemerides of Planets and the Moon (Питьева, 2004, 2005). Наряду с планетными строились также эфемериды орбитального и вращательного движения Луны, уточняемые обработкой LLR наблюдений 1970–2003 гг. (Красинский, 2002а). Эфемериды планет и Луны были построены совместным численным интегрированием уравнений движения всех планет, Солнца, Луны, 301 крупнейших астероидов, вращения Земли и Луны, с учетом возмущений от сжатия Солнца и астероидного кольца, лежащего в плоскости эклиптики и состоящего из остальных более мелких астероидов. Уравнения движения тел брались в постньютоновском приближении в поле Шварцшильда, описываемом трехпараметрической метрикой ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), в гармонической системе координат  $\alpha = 0$ ; все варианты эфемерид были построены для ОТО:  $\beta = \gamma = 1$ . В общем виде уравнения движения тел в невращающейся барицентрической системе координат имеют следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = A + B + C + D,$$

где  $A$  — ньютоновские гравитационные ускорения,  $B$  — релятивистские члены (Ньюхолл и др., 1983),  $C$  — члены, вызываемые сжатием Солнца,  $D$  — члены, вызываемые кольцом астероидов (Красинский и др., 2002б).

Приведем краткие сведения о теории ЕРМ2004 и ее построении (Питьева, 2005).

Во-первых, в ее основе лежит физическая модель, учитывающая все значимые факторы и адекватно отражающая реальные движения планет. В частности, было показано (Красинский и др., 2001; Стэндиш, Фиенга, 2002), что недостаточно учитывать возмущения лишь нескольких крупнейших астероидов, как это делалось в более ранних версиях наших ЕРМ или DE эфемерид Лаборатории реактивного движения США (JPL). В ЕРМ2004 гравитационные возмущения, вносимые в орбиты внутренних планет астероидами и затрудняющие определение параметров, были значительно уменьшены включением в совместное интегрирование уравнений движения 301 крупных астероидов и возмущений от массивного кольца малых астероидов и оценением их масс в процессе обработки наблюдений.

Во-вторых, точность самого численного интегрирования была проверена сравнением результатов прямого и обратного интегрирования на столетнем интервале времени. Возникающие ошибки были, по крайней мере, на порядок меньше неточности наблюдений. Таким образом, точность эфемерид определяется, в основном, точностью наблюдений и их редукций.

В-третьих, создание эфемерид — это итерационный процесс сравнения построенных эфемерид

с наблюдениями, уточнения параметров методом наименьших квадратов (МНК), вводом их в теорию и построением новой версии эфемерид.

В основном варианте улучшения планетной части ЕРМ2004 эфемерид определялось около 200 параметров: элементы орбит всех планет и 13 спутников внешних планет, наблюдения которых использовались для уточнения орбит этих планет; величина астрономической единицы в километрах; три угла ориентации эфемерид относительно международной небесной системы отсчета (ICRF); параметры вращения Марса (два угла ориентации экватора Марса относительно его орбиты и их вековые изменения, скорость и восемь коэффициентов сезонных членов вращения оси Марса) и координаты трех посадочных аппаратов (ПА) на поверхности Марса; массы тел (Юпитера и шести астероидов, наиболее сильно возмущающих Марс), средние плотности для трех таксономических классов астероидов (C, S, M), масса и радиус астероидного кольца, отношение масс Земли и Луны; квадрупольный момент Солнца ( $J_2$ ) и 12 параметров солнечной короны для разных соединений с Солнцем; восемь коэффициентов топографии Меркурия и поправки к уровенным поверхностям Венеры и Марса, относительно которых вычислялась топография этих планет; пять параметров для вычисления дополнительного эффекта фазы в оптических наблюдениях внешних планет; постоянные сдвиги для шести групп наблюдений, которые интерпретировались как систематические ошибки либо ошибки в калибровке аппаратуры.

После построения эфемерид ЕРМ2004 по всем радарным наблюдениям внутренних планет, КА, проходящих или вращающихся около этих планет, и марсианских посадочных аппаратов методом МНК уточнялись параметры, в том числе и релятивистские ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{G}/G$ , вековые движения перигелиев планет).

Для нахождения параметров теории методом МНК необходимо знать частные производные от наблюдаемых величин (например, времени запаздывания  $\tau$ ) по улучшаемым параметрам  $\frac{\partial \tau(t)}{\partial q(t_0)}$ , при этом обычно используют выражение  $\frac{\partial \tau(t)}{\partial s(t)} \frac{\partial s(t)}{\partial q(t_0)}$ , так как вычисление по аналитическим формулам задачи двух тел производных от наблюдаемых величин по координатам и скоростям или орбитальным элементам объекта  $s(t)$  не представляет трудности. Производные же  $\frac{\partial s(t)}{\partial q(t_0)}$  вычисляют либо аналитически, либо интегрируя вариационные уравнения. Производная  $\frac{\partial \tau(t)}{\partial \dot{G}/G}$  вычисляется через частные производные от  $\tau$  по разностям и суммам средних

долгот наблюдаемого объекта и Земли. По аналитическим формулам для релятивистских возмущений элементов, включающих вековые и главные периодические члены, приведенных в монографии Брумберга (1972), были получены выражения для нахождения частных производных от орбитальных элементов по ППН-параметрам ( $\beta$  и  $\gamma$ ). Для  $\gamma$  должна быть также добавлена производная  $\frac{\partial \tau(t)}{\partial \gamma}$ , вычисленная из эффекта Шаapiro.

Таким образом, уточнение параметров сводится к следующему:

- 1) численное интегрирование уравнений движения планет и некоторых частных производных;
- 2) вычисление по полученным эфемеридам модельных наблюдений (времен запаздывания) для каждого момента наблюдений, вычисление остаточных невязок и необходимых частных производных;
- 3) нахождение величин определяемых параметров и получение остаточных невязок наблюдений после улучшения.

Формальная точность определения параметров МНК, как показывает опыт, является чересчур оптимистической. Реальная точность может быть на порядок хуже из-за отличия распределения наблюдений от нормального и из-за систематических ошибок в наблюдениях часто неизвестной природы. Реальные точности параметров, приводимые далее в настоящей работе, оценивались сравнением величин, получаемых в десятках разных тестовых решений МНК, отличающихся наборами наблюдений, их весов, а также наборами параметров, включаемых в решение.

## НАБЛЮДЕНИЯ, ИХ РЕДУКЦИЯ И ОШИБКИ

В работе были использованы все доступные радарные наблюдения планет (58116, 1961–1997 г.), КА и ПА (195 271, 1971–2003 г.), взятые из базы данных JPL (<http://ssd.jpl.nasa.gov/iau-comm4/>), созданной и поддерживаемой доктором Стэндишем, и дополнены некоторыми рядами американских и российских радарных наблюдений планет 1961–1995 г., взятых из разных источников. Российские радиолокационные наблюдения планет вместе с ссылками на источники хранятся на сайте ИПА РАН //www.ipa.nw.ru/PAGE/DEPFUND/LEA/ENG/englea.htm. Краткое описание всех астрометрических радиотехнических наблюдений можно найти в табл. 2 работы Питьевой (2005).

Точность первых наблюдений времен запаздывания ( $\tau$ ) планет, выполненных в 1961–1962 г., составляла 200–500 мкс. Точность наблюдений

1964–1969 гг. стала выше (30 мкс). Современная точность радиолокационных наблюдений планет и КА достигает сотых долей микросекунд, что соответствует погрешности в несколько метров.

Редукции радиолокационных наблюдений, включающие релятивистские поправки — запаздывание радиосигнала около Солнца (эффект Шапиро) и переход от координатного времени, аргумента эфемерид, к собственному времени наблюдателя, а также запаздывание радиосигналов в тропосфере Земли и в плазме солнечной короны, — хорошо известны и описаны, например, в статье Стэндиша (1990). Коррекция наблюдений Марса и Венеры за топографию была выполнена с помощью современных гипсометрических карт поверхностей этих планет, а также с использованием представления топографии по сферическим гармоникам 16–18 степени. Подробности учета топографии Венеры и Марса можно найти в работе Питьевой (1996). Топография Меркурия была представлена в виде разложения по сферическим гармоникам до второго порядка включительно; коэффициенты гармоник были определены из радиолокационных наблюдений Меркурия (Питьева, 2000). Недостатками редукции является невозможность учесть быстрое изменение рельефа поверхности с помощью гармоник 16–18 степени и ограничение величины ячейки сетки при учете топографии поверхностей по гипсометрическим картам. Поэтому, к сожалению, ошибки за топографию остаются в наблюдениях планет и составляют величину порядка 100 м. В связи с этим особенно большое значение имеют высокоточные наблюдения КА, вращающихся около планет, и марсианских ПА, свободные от этих ошибок топографии.

В 1976–1982 гг. в JPL были получены измерения времени запаздывания  $\tau$  ПА Viking-1,2 на Марсе. На протяжении 20 лет эти наблюдения оставались наиболее точными (априорная точность 7 м) среди позиционных наблюдений больших планет, а в 1997 г. в течение трех месяцев, были выполнены наблюдения нового марсианского ПА Pathfinder. Одновременно с измерениями времен запаздывания проводились и наблюдения дифференциального запаздывания  $d\tau$ . Аналогичные дифференциальные запаздывания удалось восстановить Р. Уимберли для наблюдений ПА Viking-1, выполненных в 1976–1978 гг. Для вычисления положений ПА на поверхности Марса в системе отсчета эфемерид необходимо было использовать теорию вращения Марса, учитывающую не только прецессию и нутацию марсианской оси, но и сезонные члены во вращении Марса (Питьева, 1999). Наблюдения ПА позволили с высокой точностью определить не только элементы орбит Земли и Марса, но и параметры вращения Марса и, в частности, такую важную для понимания геофизики

Марса величину, как скорость прецессии Марса. Так как орбита Марса возмущается Юпитером и астероидами, то эти же наблюдения могут быть использованы для уточнения масс Юпитера и крупнейших астероидов.

Наблюдения КА, вращающихся около Марса: Mariner-9 (1971–1972 гг.), MGS — Mars Global Surveyor (1998–2003 гг.) и Odyssey (2002–2003 гг.), даются в форме нормальных точек расстояний между антеннами наблюдательных станций и центром масс Марса и могут содержать систематические ошибки недостаточно точного исключения орбиты КА при составлении нормальных точек. Такие систематические ошибки, превосходящие 2-метровые априорные ошибки, были видны в первоначальных данных MGS, сейчас они в значительной степени уменьшены. К сожалению, в отличие от двухчастотных наблюдений Viking, которые давали возможность полностью учесть запаздывание в солнечной короне, наблюдения Mariner-9, а также измерения MGS и Odyssey были выполнены в одной полосе, поэтому эффект солнечной короны был значителен, особенно вблизи верхних соединений с Солнцем. Была использована следующая модель солнечной короны для редукции этих наблюдений:

$$N_e(r) = \frac{A}{r^6} + \frac{B + \dot{B}t}{r^2},$$

где  $N_e(r)$  — электронная плотность; параметры  $B$  и  $\dot{B}$  определялись из наблюдений и были различны для разных соединений. Хотя после такой редукции за солнечную корону, невязки в наблюдениях значительно уменьшаются, но остаточное влияние короны все еще заметно в них. Более того, параметры короны коррелируют с другими определяемыми параметрами и ухудшают их определение.

Кроме того, для некоторых рядов наблюдений возникала необходимость вводить постоянные сдвиги, которые интерпретировались как систематические ошибки неизвестного происхождения, либо ошибки в калибровке аппаратуры. Были введены постоянные сдвиги для шести групп наблюдений, которые составляют: 6.9 км для наблюдений Венеры в Голдстоуне в 1964 г., 2.9 км для наблюдений Венеры в Крыму в 1969 г., 7.3 км для наблюдений Меркурия в Крыму в 1986–1989 гг., около 20 м для наблюдений Viking-1,2 и 2.5 м для Odyssey. На возможность таких ошибок в крымских наблюдениях Венеры 1969 г., Viking-1,2 и Odyssey указывалось самими наблюдателями; существование систематики в наблюдениях Венеры 1964 г. в Голдстоуне и Меркурия 1986–1989 гг. в Крыму следует из сопоставления с другими радарными измерениями в этот же период времени.

Все указанные ошибки значительно снижают точность определения параметров.

**Таблица 1.** Вековое изменение гравитационной постоянной

$\dot{G}/G$ ( $10^{-11}$ в год)	
$15 \pm 9$	Ризенберг, Шапиро (1978)
$14 \pm 2$	Андерсон и др. (1978)
$0.2 \pm 0.4$	Хеллингс и др. (1983, 1989)
$1.10 \pm 1.07$	Дамур, Тейлор (1991)
$0.00 \pm 0.11$	Вильямс и др. (2002)
$4.1 \pm 0.8$	Питьева (1986)
$0.28 \pm 0.32$	Питьева (1993)
$-0.002 \pm 0.005$	Питьева (данная работа)

Следует сказать также, что в тех случаях, когда дополнительная информация о каких-либо параметрах не могла быть получена, наблюдения, выполненные в течение суток или в пределах одной сессии для MGS и Odyssey, после внесения всех необходимых коррекций объединялись в нормальные места. При объединении всем измерениям приписывался вес согласно их априорной точности, приводимой, как правило, в публикациях.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПАРАМЕТРОВ И СЖАТИЯ СОЛНЦА

### Вековое изменение гравитационной постоянной

Нахождение возможного векового изменения гравитационной постоянной исключительно важно, так как по существу проверяется сильный принцип эквивалентности. Если космология Вселенной влияет на местные физические процессы, то следует ожидать, что коэффициенты связи между различными физическими полями меняются с космологической шкалой времени и невозможны единые фундаментальные естественные часы, т.е. гравитационные и атомные часы несоизмеримы. Согласно Кануто и др. (1979) вековое расхождение между шкалой атомного времени, в которой проводятся наблюдения, и шкалой динамического времени, в котором справедливы уравнения движения ОТО, можно интерпретировать в терминах вариации величины гравитационной постоянной  $G$ . Непосредственно наблюдаемый эффект в планетных долготках зависит от временного интервала квадратически, и исходя из априорных ошибок можно ожидать погрешность в определении величины  $\dot{G}/G$  порядка  $10^{-12}$  в год и меньше. Это примерно тот уровень, на котором ожидается переменность  $G$ , согласно некоторым физическим аргументам, например, в соответствии с гипотезой больших чисел Дирака.

Параметр  $\dot{G}/G$  уточнялся одновременно со всеми основными параметрами теории и дополнительными параметрами  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{G}/G$  и  $J_2$  Солнца.

Кроме того, были просчитаны тестовые варианты решений, когда в число определяемых параметров включались или отбрасывались другие неизвестные или наборы наблюдений. Аналогично работе Ризенберга и др. (1979) был подсчитан “маскирующий фактор”:  $\mu(\dot{G}/G) = \sigma(\dot{G}/G)/\sigma^*(\dot{G}/G)$ , где  $\sigma$  и  $\sigma^*$ , соответственно, стандартные отклонения оценок  $\dot{G}/G$ , когда все параметры оцениваются одновременно ( $\sigma$ ) и когда оценивается только один параметр ( $\sigma^*$ ). Чем ближе  $\mu$  к единице, тем устойчивее оценка параметра. При сильной корреляции параметров  $\mu$  может достигать больших величин (несколько сотен). Для  $\mu(\dot{G}/G)$  было получено значение, равное 28, которое показывает достигнутую устойчивость полученного значения (значение  $\mu(\dot{G}/G) = 80$  в работе Ризенберга, Шапиро, 1978).

Значение возможного изменения гравитационной постоянной в принципе может быть получено из анализа лунных затмений (включая древние), лунных лазерных данных, радарных наблюдений планет, КА и данных пульсарного тайминга. В табл. 1 приводятся значения  $\dot{G}/G$ , полученные авторами разными методами. Первые два значения были получены в 1978 г. независимо двумя группами из анализа радарных наблюдений планет и КА на сравнительно небольшом интервале времени, точность лучших наблюдений была тогда порядка 1 мкс. Нулевое значение  $\dot{G}/G$  было получено при включении в обработку 6-летнего ряда значительно более точных наблюдений ПА Viking Хеллингсом и др. в 1983 г., и подтверждено в 1989 г. Значение  $\dot{G}/G$  было получено Вильямсом и др. в 2002 г. из обработки лунных лазерных данных 1970–2000 гг. Дамур и Тейлор (1991) получили значение  $\dot{G}/G$  из анализа скорости изменения орбитального периода двойного пульсара PSR 1913+16 и считали, что только таким путем возможно наиболее точное определение величины изменения гравитационной постоянной. Однако в последствии выяснилось, что для пульсарного тайминга точность этой величины ограничена и зависит от уравнивания состояния нейтронной звезды и теории гравитации в сильных полях. Внизу табл. 1 приведены значения, полученные автором в разные годы из обработки радарных наблюдений планет и КА. Ненулевое значение  $\dot{G}/G$  1986 г., вероятно, объясняется систематическими ошибками наиболее ранних радарных наблюдений. Из табл. 1 виден значительный прогресс в точности оценки этой величины и уменьшение возможных пределов изменения  $\dot{G}/G$ .

### Параметры ППН-формализма

Параметры  $\beta$ ,  $\gamma$  — параметры ППН-формализма, описывающие метрические теории тяготения:  $\beta$

Таблица 2. Параметры ППН-формализма

$\gamma - 1$		$\beta - 1$	
$0.00 \pm 0.03$	Андерсон и др. (1975)		
$0.000 \pm 0.002$	Ризенберг и др. (1979)		
$0.0002 \pm 0.0010$	Робертсон и др. (1991)		
$-0.0004 \pm 0.0017$	Либих и др. (1995)		
$-0.003 \pm 0.003$	Фрошле и др. (1997)		
$-0.00006 \pm 0.00031$	Йобанкс и др. (1997)	$-0.00019 \pm 0.00026$	Йобанкс и др. (1997)
$0.002 \pm 0.004$	Вильямс и др. (2002)	$-0.001 \pm 0.004$	Вильямс и др. (2002)
$-0.0015 \pm 0.0021$	Андерсон и др. (2002)	$-0.0010 \pm 0.0012$	Андерсон и др. (2002)
$0.000021 \pm 0.000023$	Бертотти и др. (2003)		
$-0.13 \pm 0.06$	Питьева (1986)	$0.24 \pm 0.12$	Питьева (1986)
$0.006 \pm 0.037$	Питьева (1993)	$0.014 \pm 0.070$	Питьева (1993)
$-0.0001 \pm 0.0002$	Питьева (данная работа)	$0.0000 \pm 0.0001$	Питьева (данная работа)

представляет степень нелинейности гравитации,  $\gamma$  характеризует кривизну пространства, порождаемую массой покоя. В случае ОТО  $\beta = \gamma = 1$ . Два классических релятивистских теста: отклонение света Солнцем и запаздывание сигнала при прохождении вблизи Солнца измеряют один эффект — распространение фотонов в искривленном пространстве около Солнца — и зависят от параметра  $\gamma$ . Оценки этого параметра с высокой точностью получают из измерений отклонения света при VLBI наблюдениях квазаров. В табл. 2 это значения, полученные Робертсоном и др. (1991), Либихом и др. (1995), Йобанксом и др. (1997). Найденная Йобанксом и др. (1997) оценка  $\gamma$  была скомбинирована с последними значениями параметра Нордтведта из лазерных наблюдений Луны и поправкой к смещению перигелия Меркурия из радарных наблюдений планет и КА, что дало им возможность оценить также  $\beta$  и сжатие Солнца. Оценка  $\gamma$  Фрошле и др. (1997) получена из анализа оптических наблюдений HIPPARCOS.

После обнаружения Шапино и др. (1968) теоретического эффекта запаздывания радиосигналов при прохождении около Солнца этот эффект несколько раз измерялся по радарным наблюдениям планет и КА: Андерсон и др. (1975) (Mariner-6,7), Ризенберг и др. (1979) (Viking). Последняя и наиболее точная оценка (Бертотти и др., 2003) получена по измерениям сдвига частоты радиофотонов, проходящих до КА Cassini и обратно.

Возможностей для оценки параметра  $\beta$  значительно меньше. Этот параметр может быть получен из эффекта Нордтведта ( $4\beta - \gamma - 3$ ) при обработке лазерных наблюдений (Вильямс и др., 2002), либо из обработки радиолокационных наблюдений внутренних планет и КА по релятивистским возмущениям, вызывающим периодические и вековые

изменения орбитальных элементов планет (Андерсон и др., 2002); в частности, релятивистское вековое движение перигелиев зависит от  $(2 + 2\gamma - \beta)/3$ . В этих случаях, учитывая также эффект Шапино, есть возможность получить оценки сразу двух параметров  $\beta$  и  $\gamma$ . Следует отметить, однако, что корреляция между параметрами  $\beta$  и  $\gamma$  довольно велика, в работе Вильямса и др. (2002) она составляет 95%, в работе Питьевой (2005) — 84%.

В конце табл. 2 указаны оценки параметров  $\beta$  и  $\gamma$ , полученные автором в разные годы из обработки радарных наблюдений внутренних планет и КА аналогично работе Андерсона и др. (2002). По сравнению с работой Андерсона и др. (2002) результаты автора 2005 г. были получены включением в обработку большого количества высокоточных радарных и VLBI наблюдений КА MGS и Odyssey (1998–2003 гг.) и некоторых других рядов наблюдений, например российских радарных наблюдений (1961–1995 гг.). Кроме того, динамическая модель движения планет была значительно улучшена включением в совместное численное интегрирование 301 крупных астероидов и возмущений от астероидного кольца с оценкой их масс из наблюдений; тем самым астероидный шум, ухудшающий точность определения параметров, был значительно уменьшен. Вероятно, этими двумя факторами объясняется лучшая точность, достигнутая в последней работе.

Результаты показывают, что движения внутренних планет очень хорошо согласуются с ОТО, и оставляют все меньше возможностей для альтернативных теорий тяготения.

#### Вековые движения перигелиев планет

Обнаружение отклонения в движении перигелиев планет и, в дальнейшем, объяснение их эффек-

Таблица 3. Вековые движения перигелиев планет (" в столетие)

Меркурий	Венера	Земля	Марс	Источник
42.98	8.62	3.84	1.35	Брумберг (1972)
$0.11 \pm 0.22$	$-3.03 \pm 0.71$	$-0.12 \pm 0.16$	$-0.35 \pm 0.24$	Питьева (1986)
$-0.017 \pm 0.052$	—	—	—	Питьева (1993)
$-0.0036 \pm 0.0050$	$0.53 \pm 0.30$	$-0.0002 \pm 0.0004$	$0.0001 \pm 0.0005$	Питьева (данная работа)

тами ОТО являлось одним из первых релятивистских тестов. Действительно, поправки к движениям перигелиев планет довольно хорошо выявляются из наблюдений, "маскирующий фактор"  $\mu(\Delta\delta_i)$  всего в пределах 1.1–1.8 при определении этих параметров из современных наблюдений.

Швардшильдовское смещение перигелия планеты за столетие составляет величину (Брумберг, 1972)

$$\Delta\pi = \frac{3R_\mu n}{a(1-e^2)},$$

где  $R_\mu$  и  $a$  — гравитационный радиус Солнца и большая полуось планеты, выраженные в одинаковых единицах,  $e$  — эксцентриситет,  $n$  — среднее движение планеты, выраженное в угловых секундах за 100 лет. Оценки величин релятивистского смещения перигелия  $\Delta\pi$  для внутренних планет даны в табл. 3. Однако орбитальные элементы планет меняются со временем из-за взаимных возмущений всех объектов солнечной системы, поэтому точные значения величин смещений перигелиев не могут быть даны. Среднее вековое релятивистское значение смещения перигелия Меркурия, равное  $42''.980$  на интервале 1800–2200 гг., было найдено Стэндишем (2000) из сравнения значений перигелиев Меркурия каждые 400 дней в двух эфемеридах, полученных интегрированием и отличающихся наличием или отсутствием (т.е.  $\beta = \gamma = 0$ ) релятивистских членов ОТО в уравнениях движения планет.

Для альтернативных теорий тяготения основной член в смещении перигелия составляет

$$\frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta)\Delta\pi.$$

Второй член для неконсервативных теорий тяготения, входящий с коэффициентом  $M_\odot M_p / (M_\odot + M_p)$  ( $M_\odot$  и  $M_p$  — массы Солнца и планеты), пренебрежимо мал для внутренних планет и не рассматривается в дальнейшем.

Ситуация осложняется тем, что сжатие Солнца тоже вызывает вековое смещение перигелиев планет и, таким образом, общее смещение перигелиев ( $\delta$ ) — линейная комбинация ППН-параметров и

квадрупольного момента Солнца ( $J_2$ ):

$$\delta = \Delta\pi \left[ \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta) - \frac{1}{2} \frac{R_\odot^2}{R_\mu a(1-e^2)} J_2 (3 \sin^2 i - 1) \right],$$

где  $i$  — наклон орбиты планеты.

Из сравнения модельных наблюдений, вычисленных по определенным построенным эфемеридам, с реальными наблюдениями можно получить поправку  $\Delta\delta$ , которая может интерпретироваться как поправка к комбинации ППН-параметров  $2 + 2\gamma - \beta$ , либо как поправку к  $J_2$ , либо как поправки к ним обоим. Точность и количество существующих наблюдений в 1960–1970-х гг. не позволяли определять отдельные параметры  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $J_2$ , а лишь поправку  $\Delta\delta$  к их линейной комбинации, причем только для Меркурия. Реальные поправки к движениям перигелиев других планет не могли быть определены в то время. В настоящее время можно в качестве проверки определять не  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $J_2$ , а поправки к движениям перигелиев планет, что позволяет судить о правильности принятых для построения эфемерид значений  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $J_2$ .

В табл. 3 приведены полученные автором в разные годы поправки к вековым движениям планет. Из табл. 3 видно, что точности определения этих параметров для всех планет, кроме Венеры, значительно возросли за счет возрастания временного интервала, на котором наблюдаются планеты, и благодаря высокоточным наблюдениям MGS и Odyssey. Из табл. 3 видно, что принятые для построения эфемерид EPM2004 значения параметров  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $J_2 = 2 \times 10^{-7}$  очень хорошо согласуются с наблюдениями. Хотя поправка к значению смещения перигелия Меркурия находится в пределах ошибок, но возможно, требуется небольшая отрицательная поправка к комбинации  $\delta$ . Считая, что  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ , получаем новую оценку сжатия Солнца  $J_2 = (1.7 \pm 0.5) \times 10^{-7}$ . Подробнее о сжатии Солнца говорится далее.

#### Квадрупольный момент Солнца

Определение динамического сжатия Солнца является чрезвычайно важной задачей, так как значение сжатия Солнца служит контролем для теорий,

описывающих внутреннее строение Солнца и его вращение, а также является одним из параметров, необходимых для построения высокоточных теорий движения планет и Луны. Общепринятого и достаточно хорошо определенного значения динамического сжатия Солнца до сих пор не существует. Это значение может быть определено косвенным путем из различных астрофизических наблюдений Солнца. Однако такие наблюдения связаны со многими проблемами: вращение Солнца вокруг своей оси достаточно сложно, наружные слои имеют различные скорости на разных широтах, информации о вращении внутренних слоев крайне недостаточно; яркость солнечного лимба зависит от широты, а также от цикла солнечной активности, количества факелов, солнечных пятен; большие трудности вызывает калибровка наземных данных за атмосферу. Первоначальные оценки сжатия Солнца (примерно до 1970 г.) с использованием гелиометра и фотографических пластинок часто бывали ошибочны, но использование новой техники, уточнение теории внутреннего строения Солнца, проведение наблюдений на спутниках позволяет определять значение квадрупольного Солнца ( $J_2$ ) с лучшей точностью. В верхней части табл. 4 приведены некоторые значения  $J_2$ , полученные по астрофизическим наблюдениям. Значение Хилла и др. (1982 г.) было одним из наиболее точных для своего времени и часто использовалось в небесной механике для разных оценок. Там же даны недавние, вероятно, наиболее точные оценки, полученные из астрофизических наблюдений (Патерно и др., 1996; Пирерс, 1998; Годиер, Розелот, 2000). Хороший обзор всех имеющихся оценок квадрупольного момента Солнца приведен в работе Перо, Розелота (2003).

Динамическое сжатие Солнца может быть независимо определено в процессе построения теории движения тел Солнечной системы при определении параметров этой теории из наблюдений. Солнечное сжатие вызывает вековые тренды во всех элементах планет, кроме полуосей и эксцентриситета. Значения вековых трендов обратно пропорциональны квадрату полуосей; максимальный вековой ход из-за сжатия Солнца возникает в перигелии Меркурия. Согласно Брумбергу (1972) скорость векового движения перигелия дается формулой

$$d\pi_S = \frac{3}{2} \left( \frac{R_\odot}{a} \right)^2 \frac{n}{(1-e^2)^2} J_2.$$

При построении JPL версий эфемерид, начиная с DE405 и нашей ЕРМ2000, исходя из оценок Дуволы и др. (1984) и Брауна и др. (1989), полученных из гелиосейсмометрических измерений (при некоторых дополнительных предположениях) (см. табл. 4) впервые при интегрировании было принято ненулевое значение сжатия Солнца  $J_2 = 2 \times 10^{-7}$ .

Таблица 4. Квадрупольный момент Солнца

$J_2 \times 10^{-7}$	
$55 \pm 13$	Хилл и др. (1982)
$1.7 \pm 0.4$	Дуволы и др. (1984)
$1.7 \pm 0.2$	Браун и др. (1989)
$2.08 \pm 0.14$	Патерно и др. (1996)
$2.18 \pm 0.06$	Пирерс (1998)
$2.0 \pm 1.4$	Годиер, Розелот (2000)
$13.9 \pm 24.7$	Шапиро и др. (1972)
$26.3 \pm 16.5$	Андерсон и др. (1978)
$12.3 \pm 11.5$	Андерсон и др. (1992)
$-1.8 \pm 4.5$	Йобанкс и др. (1997)
$-11.7 \pm 9.5$	Питьева (1986)
$-1.3 \pm 4.1$	Питьева (1993)
$2.4 \pm 0.7$	Питьева (2001)
$6.6 \pm 9.0$	Афанасьева и др. (1990)
$-5 \pm 10$	Вильямс и др. (2002)
$2.3 \pm 5.2$	Андерсон и др. (2002)
$1.9 \pm 0.3$	Питьева (данная работа)

Основная проблема в этом случае состоит в малости параметра  $J_2$  и отделении его от ППН-параметров  $\beta$  и  $\gamma$ . До появления в последние годы большого количества высокоточных данных КА MGS и Odyssey сделать этого не удавалось, и динамическую оценку сжатия Солнца получали из оценок движения перигелия Меркурия, куда входила линейная комбинация ППН-параметров и сжатия Солнца. Некоторые такие оценки приведены в средней части табл. 4. Оценка Йобанкса и др. (1997) была получена путем комбинаций недавних оценок  $\gamma$ , параметра Нордтведта и смещения перигелия Меркурия.

В 1990 г. была выполнена большая работа по определению динамического сжатия Солнца методами небесной механики из обработки радарных и оптических (1960–1986 гг.) наблюдений группой исследователей (Афанасьева и др., 1990). К сожалению, большая часть современных высокоточных американских радарных наблюдений планет, космических и посадочных аппаратов в то время была недоступна, и точность полученной оценки была недостаточно высокой. Только в последние годы появилась возможность одновременно оценивать все три параметра  $J_2$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Такие определения даны в нижней части табл. 4. Значение Вильямса и др. (2002) получено из обработки лазерных наблюдений Луны. Оценки Андерсона и др. (1992) и автора данной статьи получены из анализа радарных наблюдений внутренних планет и КА (“маскинг” фактор сжатия Солнца  $\mu(J_2)$  равен 17). Последняя оценка, полученная более корректно, хорошо

согласуется с оценкой, выведенной из смещения перигелия Меркурия в предыдущем пункте.

По просьбе коллег, занимающихся подготовкой европейского проекта полета к Меркурию *Veri-Colombo*, был построен тестовый вариант эфемерид ЕРМ, аналогичный эфемеридам ЕРМ2004, но со значением  $J_2 = 6.52 \times 10^{-7}$ , выведенного из теории фигур С. Лефевре. Затем эти эфемериды были улучшены по наблюдениям с уточнением всех параметров кроме  $J_2$ . Как и следовало ожидать, вследствие малости данного параметра, представление наблюдений Венеры и Марса не изменилось. Хотя обычная точность наблюдений Меркурия только около 1 км, все-таки ухудшение представления Меркурия в тестовом варианте заметно: среднеквадратичная ошибка представления наблюдений Меркурия составляла 1228 м вместо 1192 м для основных эфемерид, где для интегрирования было принято значение  $J_2 = 2 \times 10^{-7}$ . Уточнение параметра  $J_2$  для тестового варианта теории дало значение  $J_2 = 1.6 \times 10^{-7}$ , снова согласующееся с полученными значениями при улучшении эфемерид ЕРМ2004.

Таким образом, можно заключить, что, вероятно, значение квадрупольного момента Солнца близко к  $2.0 \times 10^{-7}$  или несколько меньше этого значения.

#### ПЕРЕХОД ОТ ЭФЕМЕРИД В ШКАЛЕ ВРЕМЕНИ TDB К ЭФЕМЕРИДАМ В ШКАЛЕ TCB

В соответствии с резолюциями МАС, система отсчета ICRS должна рассматриваться как четырехмерная система координат с независимой переменной — координатным временем TCB, в шкале которого должны даваться планетные эфемериды. Для сравнения с широко распространенными DE-эфемеридами Лаборатории реактивного движения США наши ЕРМ-эфемериды до настоящего времени строились с временной шкалой TDB (в качестве независимой переменной), близкой к  $T_{\text{eph}}$  (Стэндиш, 1998), которая используется для построения DE-эфемерид. Поскольку для пользователей, обрабатывающих VLBI измерения и наблюдения спутников Земли, согласно рекомендациям МАС, необходимы планетные эфемериды, построенные в шкале TCB, то был построен дополнительный вариант эфемерид ЕРМ в шкале TCB. Для перехода от шкалы TDB к шкале TCB должны быть выполнены (см. например, Брумберг, Гротэн, 2001) следующие преобразования:

— начальная эпоха интегрирования  $JD = 2448800.5$  TDB выражена в TCB:

$$\text{date}(\text{TCB}) = (\text{date}(\text{TDB}) - 2443144.5) \times$$

$$\times L_B + \text{date}(\text{TDB}),$$

— координаты умножены на  $(1 + L_B)$ :

$$x_i(\text{TCB}) = x_i(\text{TDB}) \times (1 + L_B),$$

— массы умножены на  $(1 + L_B)$ :

$$GM_i(\text{TCB}) = GM_i(\text{TDB}) \times (1 + L_B),$$

— интервал запаздывания радарных наблюдений, вычисляемый в шкале TCB, должен быть выражен в собственном времени, т.е. сначала

$$\tau_{\text{TDB}} = \tau_{\text{TCB}} \times (1 - L_B),$$

а затем переводится в шкалу собственного времени обычным способом.

Так как эфемериды ЕРМ близки к DE405, было использовано значение

$$L_B = 1.55051976772 \times 10^{-8},$$

полученное для связи между TCB и TDB эфемерид DE405.

Переход к шкале координатного времени TCB не должен был и не привел к увеличению точности эфемерид и улучшаемых параметров. Невязки наблюдений идентичны для этих двух версий эфемерид ЕРМ. Как и следовало ожидать, формальные стандартные точности всех параметров и их значения (за исключением орбитальных элементов планет) совпадают в пределах формальных неопределенностей.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прохождение фотонов и движение планет в гравитационном поле Солнца позволяют рассматривать солнечную систему как достаточно удобную лабораторию по тестированию теорий гравитации. Современные радарные наблюдения планет и КА, имеющие метровую точность (относительная ошибка  $10^{-11} - 10^{-12}$ ), обеспечивают возможность тестирования релятивистских эффектов и оценки сжатия Солнца. Неопределенности в определении этих параметров (см. табл. 1–4) с 1993 г. значительно уменьшились: для квадрупольного момента Солнца и смещения перигелия Меркурия более чем на порядок, для остальных параметров ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{G}/G$ , смещение перигелиев Земли и Марса) даже на полтора порядка и более.

Значительный прогресс объясняется несколькими факторами: повышением точности процедур редукиций наблюдений и динамических моделей движения, а также улучшением качества наблюдательных данных, увеличением их точности и протяженности временного интервала, на котором были получены эти наблюдения. С уменьшением неопределенностей в определении этих параметров происходит сужение области возможных величин

релятивистских параметров, накладывая все более существенные ограничения для альтернативных ОТО теорий гравитации.

В заключение следует сказать, что численные эфемериды EPM2004 всех планет и Луны доступны через FTP:ftp//quasar.ipa.nw.ru/incoming/EPM2004.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Андерсон и др. (J.D. Anderson, P.B. Esposito, W. Martin, *et al.*), *Astroph. J.* **200**, 221 (1975).
- Андерсон и др. (J.D. Anderson, M.S. Keeseey, E.L. Lau, *et al.*), *Acta Astronautica* **5**, 43 (1978).
- Андерсон и др. (J.D. Anderson, J.K. Campbell, R.F. Jurgens, *et al.*), *6th Marcel Grossman Meeting on General Relativity* (Ed. H. Sato, T. Nakamura, World Scientific, 1992), p. 353.
- Андерсон и др. (J.D. Anderson, E.L. Lau, S. Turyshev, *et al.*), *Bull. Am. Astron. Soc.* **34**, 660 (2002).
- Афанасьева Е.И., Кислик М.Д., Колюка Ю.Ф., Тихонов В.Ф., *Астрон. журн.* **67**, 1326 (1990).
- Бертотти и др. (B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora), *Nature* **425**, 374 (2003).
- Браун и др. (T.M. Brown, J. Christensen-Dalsgaard, W.A. Dziembowski, *et al.*), *Astrophys. J.* **343**, 526 (1989).
- Брумберг В.А., *Релятивистская небесная механика* (М.: Наука, 1972).
- Брумберг, Гротэн (V.A. Brumberg and E. Groten), *Astron. Astrophys.* **367**, 1070 (2001).
- Вильямс и др. (J.G. Williams, D.H. Boggs, J.O. Dickey, and W.M. Folkner), *Ninth Marcel Grossman Meeting* (Ed. V.G. Gurzadyan, R.T. Jantzen, R. Ruffini, World Scientific, 2002), p. 1797.
- Годьер, Розелот (S. Godier and J.P. Rozelot), *Astron. Astrophys.* **355**, 365 (2000).
- Дамур, Тейлор (T. Damour and J.H. Taylor), *Astrophys. J.* **366**, 501 (1991).
- Дуволла и др. (T.L. Duvall, W.A. Dziembowski, P. Goode, *et al.*), *Nature* **310**, 22 (1984).
- Йобанкс и др. (T.M. Eubanks, D.N. Matsakis, J.O. Martin, *et al.*), *American Physical Society / APS/AAPT Joint Meeting* (1997).
- Кануто и др. (V.M. Canuto, S.-H. Hsieh, and J.R. Owen), *MNRAS* **188**, 829 (1979).
- Красинский и др. (G.A. Krasinsky, E.V. Pitjeva, M.V. Vasilyev, and E.I. Yagudina), *Communication of IAA RAS* **139**, 1 (2001).
- Красинский (G.A. Krasinsky), *Communication of IAA RAS* **148**, 1 (2002a).
- Красинский и др. (G.A. Krasinsky, E.V. Pitjeva, M.V. Vasilyev, and E.I. Yagudina), *Icarus* **158**, 98 (2002b).
- Либх и др. (D.E. Lebach, B.E. Corey, I.I. Shapiro, *et al.*), *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1439 (1995).
- Ньюхолл и др. (X.X. Newhall, E.M.Jr. Standish, and J.G. Williams), *Astron. Astrophys.* **125**, 150 (1983).
- Патерно и др. (L. Paterno, S. Sofia, and M.P. Di Mauro), *Astron. Astrophys.* **314**, 940 (1996).
- Перо, Розелот (S. Pireaux and J.-P. Rozelot), *Astrophys. Space Sci.* **284**, 1159 (2003).
- Пиперс (F.P. Pijpers), *MNRAS* **297**, L76 (1998).
- Питьева Е.В., *Бюлл. ИТА РАН* **15**, 538 (1986).
- Питьева (E.V. Pitjeva), *Celest. Mech.* **55**, 333 (1993).
- Питьева (E.V. Pitjeva), *Third International Workshop on Position Astronomy and Celestial Mechanics* (Ed. G. A. Lopez, E.I. Yagudina, U.M. Martinez, B.A. Condero, Valencia: Observ. Astron. Univ. Valencia, 1996), p. 583.
- Питьева Е.В., *Труды ИПА РАН* **4**, 22 (1999).
- Питьева Е.В., *Труды ИПА РАН* **5**, 58 (2000).
- Питьева (E.V. Pitjeva), *Celest. Mech.* **80**, 249 (2001).
- Питьева Е.В., *Труды ИПА РАН* **10**, 112 (2004).
- Питьева (E.V. Pitjeva), *Transit of Venus: New Views of the Solar System and Galaxy, IAU Coll. 196* (Ed. D.W. Kurtz, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005).
- Ризенберг, Шапиро (R.D. Reasenberg and I.I. Shapiro), *On the Measurement of Cosmological Variations of the Gravitational Constant* (Ed. L. Halpern, USA: Univ. Press Florida, 1978), p. 71.
- Ризенберг и др. (R.D. Reasenberg, I.I. Shapiro, P.E. MacNeil, *et al.*), *Astrophys. J.* **234**, L219 (1979).
- Робертсон и др. (D.S. Robertson, W.E. Carter, and W.H. Dillinger), *Nature* **349**, 768 (1991).
- Стэндиш (E.M. Standish), *Astron. Astrophys.* **233**, 252 (1990).
- Стэндиш (E.M. Standish), *Astron. Astrophys.* **336**, 381 (1998).
- Стэндиш (E.M. Standish), *Bull. Amer. Astron. Soc.* **32**, 870 (2000).
- Стэндиш, Фиенга (E.M. Standish and A. Fienga), *Astron. Astrophys.* **384**, 322 (2002).
- Фрошле и др. (M. Froeschle, F. Mignard, and F. Arenou), *Hipparcos – Venice 97, ESA-402* (Venice, 1997), p. 49.
- Хеллингс и др. (R.W. Hellings, P.J. Adams, J.D. Anderson, *et al.*), *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1609 (1983).
- Хеллингс и др. (R.W. Hellings, P.J. Adams, J.D. Anderson, *et al.*), *Int. J. Theor. Phys.* **28**, 1035 (1989).
- Хилл и др. (H.A. Hill, R.J. Bos, and P.R. Goode), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1794 (1982).
- Шапиро и др. (I.I. Shapiro, G.H. Pettengill, M.E. Ash, *et al.*), *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1265 (1968).
- Шапиро и др. (I.I. Shapiro, G.H. Pettengill, M.E. Ash, *et al.*), *Phys. Rev. Lett.* **28**, 24 (1964).